

『破産問題』と『プレゼント交換会』

帝京平成大学 鈴木義一郎

破産問題 …………… 破産するのは貧乏人

日ごろのストレスを解消するために、小づかいの範囲内でギャンブルを楽しむというのなら、苦言を呈するまでもない。だが、ギャンブルにのめりこみ、サラ金地獄になって、破産宣告を受けてしまったという話もときどき耳にする。ギャンブルで財をなしたという話はメッタナイコトだが、所持金がとりあえずゼロになる「破産」は、ヨクアルコト。結論から先に書いてしまうと、少ない資金で大金を狙えば必ず破産する。

破産の確率を小さくする唯一の戦略は、大金を用意してほんの少しだけ儲けたところで勝負を止めることである。

なにがしかの軍資金を用意して、これを何倍かにしてやろうと意気こんでギャンブルに挑戦する。かりに勝ち・負けの可能性が等しい場合でも、『所持金を 5 倍にしようと意気めば 破産の確率 80 パーセント』と、かなり大きな確率となる。

まずは公平な勝負の場合で考えてみる。甲は a 単位金をもって、 b 単位金をもっている乙と勝負する。このとき、甲が破産する確率は、 $b/(a+b)$ で与えられる。例えば a と b が等しい場合には、確率は 2 分の 1 になる。つまり公平な勝負なら、所持金と同じなら破産の確率が甲、乙とも等しくなるのは当然。では、 a を b の 9 倍にとるとどうか。甲が破産する確率は 10% のように低くなる。

次に、甲が乙に勝つ確率を 0.4 としてみる。さらに甲は 1 単位金しかなく乙は 2 単位とする。このとき甲の破産する確率は、0.79 といった値になる。これより、不利な勝負を挑めば破産の確率は 2 分の 1 よりかなり大きくなると予想できる。

右表に、甲の勝率が 0.45 とやや不利な勝負の場合についての破産の確率を示してみた。①は a が 9 で b が 1 の場合で、公平な賭の場合より大きくはなるが、破産の確率は 2 割程度である。ところが②の所持金と同じ場合には、破産の確率は 4 分の 3 近くまで大きくなる。③は a が 2 で b が 8 の場合で、所持金を 5 倍にしようとするればほぼ破産してしまうことが分かる。⑤はその逆で、多めの所持金で 2 を得たところで満足するならば、破産の確率を 4 割以下

破産の確率			
	a	b	R(a, b)
①	9	1	0.210
②	5	5	0.732
③	2	8	0.932
④	4	16	0.977
⑤	8	2	0.382
⑥	16	4	0.562
⑦	80	20	0.982

と小さくできる。

④と⑥は、③と⑤の数値をそれぞれ2倍にしたケースで、破産の確率が大きくなっている点に注目されたい。例えば甲が8万円をもっているとする。1単位金を1万円とし、2単位の2万円を獲得しようとするのが⑤である。また1単位金を5千円として4単位の2万円獲得を目論む場合が⑥である。獲得する金額は同じでも、⑥のほうがはるかに破産の可能性が高くなっている。さらに1単位金を千円としたときが⑦のパターンで、ほとんど破産といった値になる。つまり、チマチマと賭けて勝負するよりも、マトメテ単発勝負にもちこんだほうが破産しにくいのである。

この世に存在するギャンブルの類で、有利な賭けなどはまず存在しない。結局、“破産するのは貧乏人”なのだが、『ギャンブルは いずれ財布が 空になる 分かっちゃいるけど やめられない』のである。

一般に、甲の勝つ確率を p 、所持金を a とする。甲が b 単位金を獲得する前に破産する確率を $R_p(a, b)$ とすると、 $p \neq 1/2$ とするとき

$$R_p(a, b) = \frac{(q/p)^{a+b} - (q/p)^a}{(q/p)^{a+b} - 1}$$

のように与えられる。

そこで、破産の確率を算出する関数を次のように定義する。

```

ruin=:4 :0
if. x.=0.5 do. r=.1-({.%+/)y.
    else. r=(.-%]x.
    ((r^c)-r^{y.})%(r^c=+/y.)-1
end.
)
0.5 ruin 9 1
0.1
0.5 ruin 8 2
0.2
0.5 ruin 5 5
0.5
0.45 ruin 8 2
0.38192
0.45 ruin 6 4
0.637586

```

まず、勝負の確率が任意の p のように与えられている場合のランダムウォークを与える関数を次のように与える。

```

rwb=:3 :'(1000)<1000*y){_1 1'
rwb20=:3 :0
r="
while. 20>#r
  do. r=.r,rwb y.
end.
)
rwb20 0.45
1 _1 1 1 1 1 1 1 1 _1 _1 1 1 1 1 1 _1 _1 1 1 1 1 1 _1
]R=.rwb20 0.45
1 _1 _1 _1 _1 _1 1 1 1 1 1 1 1 _1 _1 1 1 1 1 1 1 1 1
+/\ R
1 0 _1 _2 _3 _4 _3 _4 _3 _2 _3 _2 _3 _4 _5 _4 _3 _2 _3 _2

```

甲の勝負に勝つ確率 p を左引数に、甲と乙の所持金を右引数として、勝負の終了した回数と、甲の獲得した所持金を与える両側関数を次のように定義する。

```

log0=:4 :0
q=#r="
while. (q>{y.)*q<{y.
  do. q=+/r=.r,rwb x.
end.
(#r),q
)
0.45 log0 4 6
6 _4
0.45 log0 4 6
10 _4
0.45 log0 4 6
8 _4
0.45 log0 4 6
6 _4

```

以上のいずれの場合も甲が破産という結果になっている。

```
0.45 log0 8 6
```

```
64 6
```

甲の所持金のほうが多いケースで、64回の勝負で、甲が「6単位金」をゲットした。

```
0.45 log0 8 6
```

```
18_8
```

今度は甲が破産した。

次に、「log0」と同じ計算であるが、勝負回数を表示しないようにした補助関数を次のように定義する

```
log=:4 :0
q=#r="
while. (q>{y.)*q<{y.
  do. q=+/r=.r,rwb x.
end.
)
```

勝負を行った回数 n と甲の勝負に勝つ確率 p を左引数に、甲と乙の所持金を右引数として、甲が勝った回数と、甲が破産した回数を与える両側関数を次のように定義する。

```
logn=:4 :0
a=.b=.0 [(n={x.},p={x.
while. n>a+b
  do. if.({y.)=p log y.do.a=.a+1 else.b=.b+1 end.
end.
a,b
)
```

```
100 0.45 logn 8 2
```

```
30 70
```

```
100 0.45 logn 16 4
```

```
60 40
```

```
100 0.45 logn 80 20
```

```
99 1
```

プレゼント交換会……… 意外に高いマッチングの確率

あるパーティで、参加者全員が 1000 円程度のプレゼントを用意し、「プレゼント交換会」をしたとする。誰がどのプレゼントを貰うかは“くじ引き”決めることにした場合、誰かが自分の用意したものを当ててしまうという、アンラッキーなことの起きる可能性はどのくらいあるだろうか。

まず、3 人の場合で考えてみよう。1 番目の人が用意したプレゼントを①、同様に 2, 3 番目の人が用意したプレゼントを②、③のように表すことにする。起こり得る結果は、次のように 6 通りある。

	1	2	3		1	2	3
(イ)	①	②	③	(二)	②	③	①
(ロ)	①	③	②	(ホ)	③	①	②
(ハ)	②	①	③	(ヘ)	③	②	①

3 人とも他の人からのプレゼントを貰う場合は、(二)、(ホ)の 2 通りしかないから、アンラッキーなことの起きる可能性は $2/3$ ということになる。

それでは、4 人の場合はどうか。今度は起こり得る結果が全部で 24 通りあるが、4 人全員が他の人からのプレゼントを貰うケースは

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
②	①	④	③	③	①	④	②	④	①	②	③
②	③	④	①	③	④	①	②	④	③	①	②
②	④	①	③	③	④	②	①	④	③	②	①

のように全部で 9 通りしかないから、アンラッキーなことの起きる可能性は $9/24 = 5/8$ となる。

そこで一般に、 k 人の場合で考えてみる。この場合の組み合わせの総数は $k!$ である。このうちで、全ての人から他人からのプレゼントを貰う場合の数を $U(k)$ と表すと、アンラッキーなことの起こる可能性は「 $1 - U(k)/k!$ 」で与えられる。なお上で見たように $U(3) = 4$, $U(4) = 9$ である。

さて、1 番目の人だけが自分の用意したプレゼント①を受け取り、残る $(k - 1)$ 人が全て他人からのプレゼントを貰うという場合の数を $A(k; 1)$ のように表すと、2 番目から k 番目までの $(k - 1)$ 人が全て他人からのプレゼントを貰う場合の数 $U(k - 1)$ に等しくなる。同様に、2 番目の人だけが自分の用意したプレゼント②を受け取り、残る $(k - 1)$ 人が全て他人からのプレゼントを貰うという場合の数 $A(k; 2)$ も $U(k - 1)$ に等しい。

したがって、ある1人だけが自分の用意したプレゼントを貰い、残る $(k-1)$ 人が全て他人からのプレゼントを貰うという場合の数 $A(k)$ は

$$A(k) = A(k;1) + A(k;2) + \dots + A(k;k) = k \times U(k-1)$$

という関係で与えられる。

次に、1番目の人と2番目の人だけがそれぞれ自分の用意したプレゼント①、②を受け取り、残る $(k-2)$ 人が全て他人からのプレゼントを貰うという場合の数を $B(k;1,2)$ と表すと、これは3番目から k 番目までの $(k-2)$ 人が全て他人からのプレゼントを貰う場合の数 $U(k-2)$ に等しい。したがって、ある特定の2人だけが自分の用意したプレゼントを貰い、残る $(k-2)$ 人が全て他人からのプレゼントを貰うという場合の数 $B(k)$ は

$$B(k) = B(k;1,2) + B(k;1,3) + \dots + B(k;k-1,k) = {}_k C_2 \times U(k-2)$$

のように与えられる。以下、ある特定の3人だけが自分の用意したプレゼントを受け取る場合の数は $C(k) = {}_k C_3 \times U(k-3)$ 、4人だけが自分の用意したプレゼントを受け取る場合の数は $D(k) = {}_k C_4 \times U(k-4)$といったように与えられることから、結局、少なくとも1人が自分のものを受け取ることになる場合の総数は

$$\textcircled{1} \quad {}_k C_1 U(k-1) + {}_k C_2 U(k-2) + {}_k C_3 U(k-3) + \dots + {}_k C_{k-2} U(2) + 1$$

のように表現できることが分かる。したがって、この値を $k!$ から引いたものが $U(k)$ ということになる。かくて一般に

$$\textcircled{2} \quad U(k) = k! - \{ {}_k C_1 U(k-1) + {}_k C_2 U(k-2) + {}_k C_3 U(k-3) + \dots + {}_k C_{k-2} U(2) + 1 \}$$

といった関係の成立することが分かる。

$$\text{さて、} U(1) = U(2) = 1, \quad U(3) = 2, \quad U(4) = 9 = 4 \times U(3) + 1$$

であったから、

$$U(5) = 5! - \{ {}_5 C_1 \times U(4) + {}_5 C_2 \times U(3) + {}_5 C_3 \times U(2) + 1 \} \\ = 120 - \{ 45 + 20 + 10 + 1 \} = 44 = 5 \times U(4) - 1$$

$$U(6) = 6! - \{ {}_6 C_1 \times U(5) + {}_6 C_2 \times U(4) + {}_6 C_3 \times U(3) + {}_6 C_4 \times U(2) + 1 \} \\ = 720 - \{ 265 + 135 + 40 + 15 + 1 \} = 265 = 6 \times U(5) + 1$$

といったように、逐次算出することができる。

以上の結果を眺めると

$$\textcircled{3} \quad U(k) = k \times U(k-1) + (-1)^k$$

といった関係の成立することが予想できる。

そこで、ある k まで③の関係の成立することを仮定する。②の関係より

$$U(k+1) = (k+1)! - \{ {}_{k+1} C_1 U(k) + {}_{k+1} C_2 U(k-1) + \dots + {}_{k+1} C_{k-2} U(3) + {}_{k+1} C_{k-1} U(2) + 1 \} \\ = (k+1) [k! - \{ {}_k C_1 U(k-1) + {}_k C_2 U(k-2) + {}_k C_3 U(k-3) + \dots + {}_k C_{k-2} U(2) + 1 \}] \\ - \{ {}_{k+1} C_1 (-1)^k + {}_{k+1} C_2 (-1)^{k-1} + \dots + {}_{k+1} C_{k-2} (-1)^3 + {}_{k+1} C_{k-1} - (k+1) + 1 \} \\ = (k+1)U(k) - \sum_{i=1}^{k+1} {}_{k+1} C_i (-1)^{k+1-i} = (k+1)U(k) + (-1)^{k+1}$$

となり、 $k+1$ のときにも③の関係の成立することが示された。

かくて、 k 人全ての人が他人からのプレゼントを貰えることになる確率 $P(k)$ は、③の関係を $k!$ で割ることにより

$$\textcircled{4} \quad P(k) = \frac{U(k)}{k!} = \frac{U(k-1)}{(k-1)!} + (-1)^k \frac{1}{k!} = P(k-1) + (-1)^k \frac{1}{k!}$$

という関係が得られた。結局

$$\textcircled{5} \quad P(k) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k!}$$

という関係の成立することが示された。この式の $k \rightarrow \infty$ のときの極限の値は

$$e^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$$

で、「オイラーの定数」と呼ばれている“超越数”

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 2.718281828459045\dots\dots$$

の逆数である。

そこで、 $\{U(1), U(2), U(3), \dots, U(k-1)\}$ を入力して $U(k)$ を求めるJ言語の関数は次のように与えられる。

u_fn=:3:0	u_fn 1 1
s=:!r=:>:#y.+k=.d=.0	2
while. k<r-2	u_fn 1 1 2
do. d=.d+(k!r)*(-k=.k+1){y.	9
end.	u_fn 1 1 2 9
s -d+1	44
)	u_fn 1 1 2 9 44
	265
	u_fn 1 1 2 9 44 265
	1854
	u_fn 1 1 2 9 44 265 1854
	14833
	u_fn 1 1 2 9 44 265 1854 14833
	133496

さらに、右引数で与えた個数までの $U(k)$ を一気に算出する関数は次のようになる。

<pre> u_fns=:3 :0 if. y.=1 do. r=.1 elseif. y.=2 do. r=.1 1 elseif. y.>2 do. r=.1 1 while. y.>#r do. r=.r,u_fn r end. end.) </pre>	<pre> u_fns 5 1 1 2 9 44 u_fns 9 1 1 2 9 44 265 1854 14833 133496 </pre>
---	--

さらに、参加者全員が全て他人からのプレゼントを受け取ることのできる確率 $P(k) = U(k)/k!$ ($1 \leq k \leq 9$) は次のように与えられる

<"0 |:k,:(u_fns 9)%!k=.1+i.9

1	1
2	0.5
3	0.333333
4	0.375
5	0.366667
6	0.368056
7	0.367857
8	0.367882
9	0.367879

<pre> p_fn=:3 :0 p=.1+k=.0 while. k<y. do. p=.p+(_1^k)%!k=.k+1 end.) </pre>	<pre> p_fn 2 0.5 p_fn 5 0.366667 p_fn 7 0.367857 p_fn 8 0.367882 p_fn 9 0.367879 </pre>
---	---

