

# ボックスカウント次元の計算

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 開放環境科学専攻  
塩谷 昌典

## 1 フラクタル次元解析

複雑な時系列を決定論的カオスの側面から解析するには、決定論的カオスを含む非線形力学系の応答の特徴を、どのように捉えていくかということを考えなければならない。すなわち、決定論的非線形力学系の本来持つ特徴を定量化する非線形統計量を推定する必要がある。

なかでも、最も早くから実データに対して適用されてきたのは、フラクタル次元解析である。フラクタル次元をより正確に推定することは、解析対象となるシステムの本来有する自由度を推定することに対応する。このフラクタル次元推定の基本的な手法に、ボックスカウンティング法と呼ばれる手法がある。ボックスカウンティング法は、比較的低次元のデータにおいては効力を発揮するが、非常に大きいデータ数が必要となることや、計算のために大量のメモリが必要となるなどの理由により、実際のデータに対して適用することはほとんど不可能とされてきた。

しかし、低次元であることと、最近のコンピュータの速度の向上を考慮すれば、ボックスカウンティング法による次元推定は必ずしも無理な話ではない。そこで、2次元時系列データのボックスカウント次元を  $J$  によって計算させたのでそれを紹介する。

## 2 フラクタル次元

我々は経験的に点は0次元、直線は1次元、平面は2次元、空間は3次元であることを知っている。このような経験的次元はすべて整数で、その数字は独立に選べる変数の数であり、自由度と一致する。

しかし、このような次元では、複雑な構造を持つカオス力学系の特徴を表すことができない。カオス力学系の特徴の一つとして、その幾何学的形状が自己相似構造を持つことがしばしばあげられる。自己相似構造とは、それ自身を拡大してみると、そこに同じ形状が現れるような構造のことである。代表的なものに、コッホ曲線やシェルピンスキーのギャスケットなどがある。

それでは、このような自己相似構造をどのように定量化すればよいのであろうか。その

答えが、非整数値を取り得るフラクタル次元である。

## 2.1 相似性次元

線分，正方形，立方体について次元の相似性を考える．まず，各図形を図1のように各図形の線分を2等分する．線分は半分の長さの線分2つになる．正方形の場合には1辺が元の1/2の正方形4個になり，立方体は8個になる．

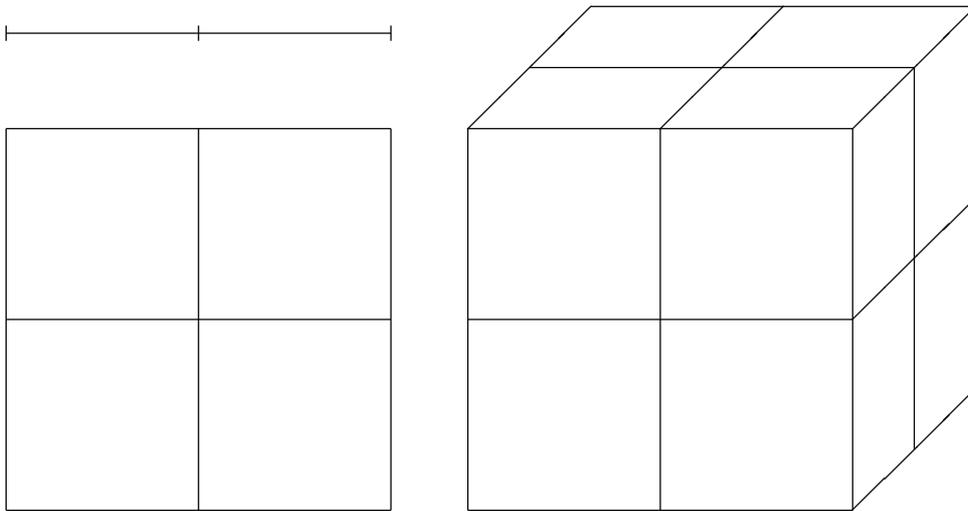


図1: 次元

つまり，線分，正方形，立方体はそれぞれ全体を1/2にした相似形2, 4, 8個によって全体を構成しているとみなすことができる．この2, 4, 8は $2^1, 2^2, 2^3$ と書くことができる．ここに現れる指数1, 2, 3がそれぞれの図形の経験的な次元と一致する．一般的な表現をすると，ある図形が $1/a$ に縮小した相似図形 $a^D$ 個によって構成されているときこの指数 $D$ が次元の意味を持つわけである．この次元を相似性次元と呼ぶ．

このように相似性次元は経験的な次元を自己矛盾のないように再構成しているが，実は，経験的な次元では考えられなかったような性質も持っている．それは，上の定義からもわかるように相似性次元 $D$ は整数値である必要がまったくない．もしもある図形が全体を $1/a$ に縮小した相似形 $b$ 個によって構成されているとすると $b = a^D$ より相似性次元は，

$$D = \frac{\log b}{\log a} \quad (1)$$

となるわけである．

## 2.2 ハウストルフ次元

$D > 0$  とする．集合  $E$  を直径が  $\varepsilon (> 0)$  よりも小さい可算個の球によって覆う．このとき，各球の直径を  $d_1, d_2, \dots, d_k$  とすると， $D$  次元ハウストルフ測度は，

$$M_D(E) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{d_k < \varepsilon} \sum_k d_k^D \quad (2)$$

によって定義される．この量が 0 から無限大に遷移するとき， $D$  を集合  $E$  のハウストルフ次元といい  $D_H$  とあらわす．このような  $D_H$  は，勝手に与えられた図形に対して，唯一存在することが示されている．

測度とは，長さや面積を一般化した概念で，1 次元測度は長さ，2 次元測度は面積，3 次元測度は体積を表している．球（円）によって近似された図形に関して言えば， $\sum_k d_k$  が 1 次元測度であり， $\sum_k d_k^2$  が 2 次元測度に比例する量を表す．この覆い方に無駄がないことは  $\inf$ （下限を取る）ことによって自動的に満たされる．直径  $d$  の 1 次元球（線分）の 1 次元測度は  $d^1$  に，2 次元球（円）の 2 次元測度は  $d^2$  に，3 次元球の 3 次元測度は  $d^3$  に比例することを一般化すれば， $D$  次元球の  $D$  次元測度は  $d^D$  に比例すると考えてよい．

比例定数を省略することにすれば，今問題となっている図形の  $D$  次元測度は， $\sum_k d_k^D$  によって与えられるわけである．この形式ならば， $D$  は自然数のみならず実数まで拡張される．

## 2.3 一般化次元とボックスカウント次元

$d$  次元空間を一辺  $\varepsilon > 0$  の  $d$  次元超立方体によって分割し，各超立方体内に点が現れる確率密度関数  $p_i (i = 1, \dots, N)$  を求め，アトラクタ（時系列）における点の分布の複雑さを  $q$  次の相関  $\sum_{i=1}^N p_i^q$  で測ると，一般化次元  $d_q$  の定義が得られる．

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^q}{\log \varepsilon} \quad (3)$$

一般化次元は， $q = 0$  でボックスカウント次元（容量次元）， $q \rightarrow 1$  の極限で情報次元， $q = 2$  で相関次元に一致する．一般に， $d_q \geq d_{q+1}$  が成り立つ．一般化次元のうちどの次元でアトラクタの次元を表現しても，時系列解析に有意な差が現れることはない．そのた

め、相関次元  $d_2$  を用いることが多いのだが、ここでは、ボックスカウント次元をとりあげる。

考えている図形を  $d$  次元空間  $R^d$  内の有界な集合とする。半径  $\varepsilon$  の  $d$  次元球または  $d$  次元立方体によってその集合を被覆するとき、 $N(\varepsilon)$  を球または立方体の個数の最小値とする。ボックスカウント次元（容量次元） $D_0$  は、

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (4)$$

となる。

### 3 ボックスカウント次元の計算

ボックスカウント次元を計算するには、図形を格子状に分割し、図形が存在するボックスの数を数えるのであるが、図形自体は曲線（折れ線）であるのに、データは点のデータしかないので、それを考慮する必要がある。そこで、図形を画像として保存し、そのビットマップデータを用いて、格子の数を数えるという方法をとった。

以下に手順を簡単に示す。カッコ内は J の関数である。

1. 点データを読み込む。
2. 図形全体を覆う大きさの正方形に図形を表示し、画像を保存する (bmp)。
3. 画像を読み込み、ピクセルレベルでの画像を認識する (box)。
4. J のボックスの性質を用いて、各大きさの格子状に分割し、図形の存在するボックスの数を数える (box)。
5. 両対数グラフから、ボックスカウント次元を計算する (kaiki)。

### 4 適用例

計算に用いたデータは、重心動揺の擬似データといわれるものである。擬似データは、重心動揺の 5 つパターンについて、フォースプレート上に乗った被験者が、両足をそろえ、開眼で、それぞれの型に従うように意識的に動いて作成したものである。サンプリング間隔は  $20\text{Hz}$ 、実験時間は 60 秒、データ数  $N$  は 1200 で、びまん型と呼ばれるデータのうち 20 例を用いた。

また、今回のプログラムと比較するため、Higuchi の方法と呼ばれるハウスドルフ次元を計算する方法による結果もあわせて挙げる。

表 1: 結果

	Box Counting	Higuchi's Method
平均	1.71626	1.70823
分散	0.00355321	0.01038132
最小値	1.61913	1.55917
最大値	1.84467	1.87131

これを見ると、今回の計算方法による結果の方がおとなしい感じを受ける。また、ここには挙げてないが、それぞれの方法で最大や最小を取ったデータが異なることも興味深い。

## 5 スクリプト

```

coinsert'jgl2'
load 'gl2 files graph plot'

range=>./-<./
min=<./
mp=:+/ .*
onein=:1: e. ,

dir='g:\data\'
li=:200 125 100 50 40 25 20 NB. length of r (pixel)

boxcount=: 3 : 0
n=:#file=: 'm' fread dir,'file.txt'
i=:0
kekka=:0 0
for. i.n do.
N=: -:# xy=: , ". 'm' fread dir,(i{file)
bmp xy=: (N,2)$xy
kekka=:kekka,.kaiki ^. li,. box 'temptemp.bmp'
i=:>i
end.
kekka=:}. |:kekka
)

bmp=: 3 : 0
x=:{"1 y.
y=:{"1 y.
newx=:x - min x
newy=:y - min y
width=: (range x) >. range y
newxy=:1000*(newx,.newy)%width

wd 'pc bmp'
wd 'xywh 0 0 400 400;cc ban isigraph'
wd 'pas 0 0;pcenter'
glsel ban
glclear ''
glrgb 0 0 0
NN=:#y.

```

```

glmove xytemp={.newxy
j=:1
for. i.<:NN do.
xytemp=: {j}.newxy
glline xytemp
j=:>:j
end.
glshow ''
glfile 'temptemp.bmp'
glsavebmp 1000 1000
)

bmp_close=: 3 : 0
wd'pclose'
)

box=: 3 : 0
mat=:54}. a.i. (1!:1) <y.
matrix=:1000 1000$.> (*@+)&.> _4<\ mat

k=:0
l=:''
while. k<#li do.
  l=:1, +/(2 2$(k{li)) onein ;._3 matrix
  k=:>:k
end.
]l
)

kaiki=: 3 : 0
x0=:1,.{."1 y.
y0=:{"1 y.
b=(%. ((l: x0) mp x0) )mp (l: x0) mp y0
se2=:+/*: rs=:y0 - x0 mp b
st2=:+/*: y0 - (+/ y0) % # y0
(l{:b),r2=:1-se2%st2
)

```

## 参考文献

- [1] 相原一幸 (編): カオス時系列解析の基礎と応用, 産業図書, 2000 .
- [2] 松本隆, 徳永隆治, 宮野尚哉, 徳田功: カオスと時系列, 培風館, 2002 .
- [3] 高安秀樹: フラクタル, 朝倉書店, 1986 .
- [4] 石村貞夫, 石村園子: フラクタル数学, 東京図書, 1990 .
- [5] 時田喬: 重心動揺検査 その実際と解釈 , アニマ株式会社, 2000 .
- [6] Higuchi, T: Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory , Physica D 31 , pp.277-283 , 1988 .
- [7] 横山, 小川, 竹内: リカレンスプロットによる平衡機能検査データの解析, 日本人間工学会第 33 回関東支部大会講演集 , pp.27-28 , 2003 .