多変量自己回帰　VAR

Masato Shimura
m.shimura@jcom.home.ne.jp

2003 年 8 月 14 日

目次

1　相互相関関数　Cross-Correlation Coefficience

多変量自己回帰モデルは, 変数がベクトルで表現されるので,VAR(vector autoregressive model) と呼ばれる。

1.1　CCF(k) crosscorreration function

相互共分散関数は次により求められる。

$$CCF(k) = \frac{\sum_{t=1+k}^{n}(Y_t - \bar{Y})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2 \sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}}$$

または,

$$COV_{xy}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1+k}^{n}(Y_t - \bar{Y})(X_{t-k} - \bar{X}), k \geq 0$$

$$COV_{xy}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1-k}^{n}(Y_{t-k} - \bar{Y})(X_t - \bar{X}), k \geq 0$$

$$CCF(k) = \frac{COV_{xy}(k)}{S_x S_y}$$

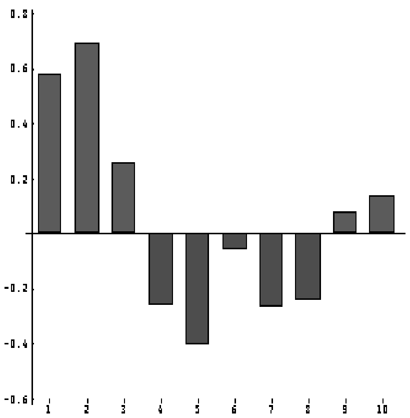

図 1: Cross-Correlation NY-LONDON Stock price

$$\rho_{xy}(k) = \gamma_{xy}(k)\sqrt{\gamma_{xx}(0)\gamma_{yy}(0)}$$

$$\gamma_{xy}(-k) = E[(X_t - \mu_x)(Y_{t-k} - \mu_y)]$$

1.2

相互相関		

1.2.1　解説

いくつかの時系列のデータを相互にラグを取った場合の相関係数である。時間の推移とともに相関の強弱が変化する過程が plot によくあらわされる。

```
  IBM 株の NY London 取引所のデータの最初の１０ピース（１９９３）
   Cross Correlations between NY & London  IBM Stock Prices

 NY      London
38.625   56.5
38.879 57.625
39.125      59
39.375   59.5
40.063   58.5
39.375 58.875
39.438  59.25
39.625 58.625
 39.25 58.125
39.063  58.75



   ccf q
-5|   0.580839   0.691107  0.259779 _0.257538 _0.404517
 0|  _0.0553644 _0.266541 _0.242612  0.0788315 0.136927


      ccf2 dat
      0             1                 2                   3
+-----------------+-----------------+--------------------+-------------------
|0.455316 0.580839|0.165699 0.691107|0.00810851  0.259779|_0.0459359 _0.257538|
|0.580839  2.19628|0.148197 0.660269|_0.0206628 _0.518274| _0.173093 _0.305578|
+-----------------+-----------------+--------------------+-------------------
```

NY 自己相関　LN -k
LN　+k　LN　自己相関

1.2.2　Script

```
ccf=: 3 : 0
NB. CCF  (2 variate )
dev=: -"1 (mean=: +/ % #)
C0=: mean y.
C1=: ( <\. 0{"1 y.) ,.  |.@(<\) 1{"1 y.
C2=:((0{"1 C1) - (L:0) 0{C0),.((1{"1 C1) - (L:0) 1{C0)
NB.Cov xy
C4=: ( +/ "1 */ "2 >C2) % # y.
NB. Sx * Sy (use dev)
C5=: */ %: (([: +/ ^&2) dev y.) % # y. NB. (devide by n type)
NB. C5=: %: +/ */ "1 y.
C4 %   C5
)

ccf2=: 3 : 0
NB. Correlation coefficience   (multi variate )
NB. divide Sxx Syy
NB. Usage: ccf2 n (data matrix is tate type)
C2=: (dev=: - "1 +/ % #) y.
C1=: (|. <\  C2) ,:  <&|: \.  C2
C4=:(1{C1) +/ . * (L:0) 0{C1
NB. C5=:*/  %: (   +/  ^&2 y.) % # y.
C5=:*/  %: (   +/  ^&2 C2) % N=: # y.  NB. each SD
( C4 % L:0 N) % L:0 C5 NB. Cov / SD
)
```

```
ccf3=: 3 : 0
NB.Covariance coefficient  (multi variate )
NB. divide only by n
NB. Usage: ccf3 n (data matrix is longitude type)
C2=: (dev=: - "1 +/ % #) y.
C1=: (|. <\  C2) ,:  <&|: \.  C2
C4=:(1{C1) +/ . * (L:0) 0{C1
C4 % L:0 0{# y.
)
```

2　多変量自己回帰・VAR

自己回帰 (Autoregression) を多変量に拡張した多変量自己回帰の方法にも, ユール・ウオーカー法、バーク法、ハウスホルダー法がある。

2.0.3　ユールウオーカー法・Yule-Walker Method

$C(m) = \dfrac{1}{N} \sum_{N=m+1}^{N} x(n)x(n-m)'$

$C(m)$ は自己共分散関数の推定値で $k \times k$ 行列。

Yule-Walker 方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} C(0) & C(-1) & \dots & C(1-M) \\ C(-1) & C(0) & \dots & C(2-M) \\ \dots & & & \\ C(1-M) & C(2-M) & \dots & C(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(1) \\ A(2) \\ \dots \\ A(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(1) \\ C(2) \\ \dots \\ C(M) \end{pmatrix}$$

2.0.4　経過と説明

```
  dat=: ?. 10 2 $ 20
```

相互共分散行列の生成

```
   ccf3 dat
+----------+-----------+-----------+-----------+------------+
|34.61   11|4.631 _9.57|_2.128 _3.11|_0.137 _1.53|_10.116 11.81|
|   11 27.2|_2.28 _15.5|  3.39   5.2| _4.74  _8.7|   4.64     8|
+----------+-----------+-----------+-----------+------------+
```

Yule-Walker　Matrix の生成

```
   3 mgmain dat
+------------+-----------+-----------+-----------+
|34.61   11  |4.631 _9.57|_2.128 _3.11|4.631 _9.57 |
|   11 27.2  |_2.28 _15.5|  3.39   5.2|_2.28 _15.5 |
+------------+-----------+-----------+-----------+
```

```
|4.631 _9.57 |34.61    11 |4.631 _9.57 |_2.128 _3.11|
|_2.28 _15.5 |    11 27.2 |_2.28 _15.5 |  3.39   5.2|
+------------+-----------+------------+------------+
|_2.128 _3.11|4.631 _9.57|34.61    11  |_0.137 _1.53|
|  3.39   5.2|_2.28 _15.5|    11 27.2  | _4.74  _8.7|
+------------+-----------+------------+------------+
```

2.0.5　レビンソンのアルゴリズム・Levinson Algolism

J はマトリックスを要素とするマトリクスの逆行列をいきなり求めることが出来ない。

多変数の Yule-Walker 方程式の解法として, レビンソンのアルゴリズム（多変数版）があり、一変数と同様に偏相関係数を求めることにより, 高次の回帰係数を順次求めることができるので、この方法によった。

(1) 初期値の設定 $(m = 0)$

$W_0 = Z_0 = C(0)$

AIC(0) = N log—$W_0|$

(2) レビンソンのアルゴリズム $(m = 1, 2, \dots, M)$

$E(m) = C(m) - \sum_{i=1}^{m-1} A_{m-1}(i)C(m-i)$

$A_m(m) = E(m)Z_{m-1}^{-1}$

$B_m(m) = E(m)^T W_{m-1}^{-1}$

$A_m(i) = A_{m-1}(i) - A_m(m)B_{m-1}(m-i), (i = 1, \dots, m-1)$

$B_m(i) = B_{m-1}(i) - B_m(m)A_{m-1}(m-i), (i = 1, \dots, m-1)$

$W_m = C(0) - \sum_{i=1}^{m} A_m(i)C(i)^T$

$Z_m = C(0) - \sum_{n=1}^{m} B_m(i)C(i)$

AIC(m)=Nlog—$W_m| + 2mk^2$

2.0.6　経過と結果

[0 次]

$W_0 = Z_0 = C(0)$

[1 次]

$$E(1)=C(1)$$
$$A_1(1)=E(1)Z_0^{-1}$$
$$B_1(1)=E(1)^T W_0^{-1}$$
$$W_1=C(0)-A_1(1)C(1)^T$$
$$V_1=Z_1=C(0)-B_1(1)C(1)$$
[2 次]
$$E(2)=C(2)-A_1(1)C(1)$$
$$A_2(2)=E(2)Z_1^{-1}$$
$$B_2(2)=E(2)^T W_1^{-1}$$
$$A_2(1)=A_1(1)-A_2(2)B_1(1)$$
$$B_2(1)=B_1(1)-B_2(2)A_1(1)$$
$$W_2=C(0)-\sum\begin{pmatrix}A_2(1)C(1)^T\\A_2(2)C(2)^T\end{pmatrix}$$
$$V_2=Z_2=C(0)-\sum\begin{pmatrix}B_2(1)C(1)\\B_2(2)C(2)\end{pmatrix}$$
[3 次]
$$E(3)=C(3)-\sum\begin{pmatrix}A_2(1)C(2)\\A_2(2)C(1)\end{pmatrix}$$
$$A_3(3)=E(3)Z_2^{-1}$$
$$B_3(3)=E(3)^T W_2^{-1}$$
$$\begin{pmatrix}A_3(1)=A_2(1)-A_3(3)B_2(2)\\A_3(2)=A_2(2)-A_3(3)B_2(1)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}B_3(1)=B_2(1)-B_3(3)A_2(2)\\B_3(2)=B_2(2)-B_3(3)A_2(1)\end{pmatrix}$$
$$W_3=C(0)-\sum\begin{pmatrix}A_3(1)C(1)^T\\A_3(2)C(2)^T\\A_3(3)C(3)^T\end{pmatrix}$$
$$V_3=Z_3=C(0)-\sum\begin{pmatrix}B_3(1)C(1)\\B_3(2)C(2)\\B_3(3)C(3)\end{pmatrix}$$
[4 次]

$$E(4) = C(4) - \sum \begin{pmatrix} A_3(1)C(3) \\ A_3(2)C(2) \\ A_3(3)C(1) \end{pmatrix}$$
$$A_4(4) = E(4)Z_3^{-1}$$
$$B_4(4) = E^T(4)^T W_3^{-1}$$
$$\left(A_4(1) = A_3(1) - A_4(4)B_3(3)A_4(2) = A_3(2) - A_4(4)B_3(2)A_4(3) = A_3(3) - A_4(4)B_3(1) \right)$$
$$\left(B_4(1) = B_3(1) - B_4(4)A_3(3)B_4(2) = B_3(2) - B_4(4)A_3(2)B_4(3) = B_3(3) - B_4(4)A_3(1) \right)$$
$$W_4 = C(0) - \sum \begin{pmatrix} A_4(1)C(1)^T \\ A_4(2)C(2)^T \\ A_4(3)C(3)^T \\ A_4(4)C(4)^T \end{pmatrix}$$
$$V_4 = Z_4 = C(0) - \sum \begin{pmatrix} B_4(1)C(1) \\ B_4(2)C(2) \\ B_4(3)C(3) \\ B_4(4)C(4) \end{pmatrix}$$

2.1 TIMSAC のデータで

統計数理研究所の時系列解析プログラム TIMSAC が公表されている。TIMSAC の多変量時系列解析のサンプルデータを用いて見よう。(n=500)

```
   adat2
713 5508 652
709 5511 650
709 5509 686
710 5506 697
712 5503 701
714 5502 706
716 5500 709
716 5499 710
718 5499 710
720 5496 708
721 5491 713
724 5490 714
```

```
726 5485 714
728 5484 735
730 5482 736

(n=  500)
```

自己相関係数

```
 8.5 ": L:0  ccf2 adat2
+-----------------------+-----------------------+-----------------------+
| 0.01343 0.00407 0.01425| 0.01325 0.00395 0.01387| 0.01284 0.00384 0.01342|
| 0.00407 0.02163 0.00098| 0.00422 0.02145 0.00057| 0.00438 0.02120 0.00112|
| 0.01425 0.00098 0.10175| 0.01449 0.00161 0.06427| 0.01432 0.00189 0.00243|
+-----------------------+-----------------------+-----------------------+...
```

```
  4   varmain   ccf2   adat2
+-----------------------+-----------------------+-----------------------+
| 1.68205_0.00067 0.00241|_0.75117 0.01197_0.00056| 0.07704_0.00961 0.00140|
|_0.02651 1.09003_0.00637| 0.01613 0.01840 0.00937| 0.03608 0.03156 0.00262|
| 0.57314_0.19702 0.91130| 0.01740 0.12938_0.51502| 0.82392_0.55123_0.22514|
+-----------------------+-----------------------+-----------------------+
| 1.66845_0.02353 0.00439|_0.73853 0.01990_0.00389| 0.08229 0.02055 0.00249|
|_0.04814 1.11082 0.01118| 0.06069 0.00909 0.00293|_0.03334 0.02255_0.00886|
| 1.33946_0.86264 0.90411|_0.78035 0.12683_0.50662|_0.08226_0.00679_0.21875|
+-----------------------+-----------------------+-----------------------+
| 0.00018 0.00000_0.00005| 0.00018_0.00001 0.00011|                       |
| 0.00000 0.00032 0.00001|_0.00001 0.00033 0.00017|                       |
|_0.00005 0.00001 0.02935| 0.00011 0.00017 0.02905|                       |
+-----------------------+-----------------------+-----------------------+
```

上段　Amm　３次まで掲載

中断　Bmm　３次まで掲載

下段　W　V

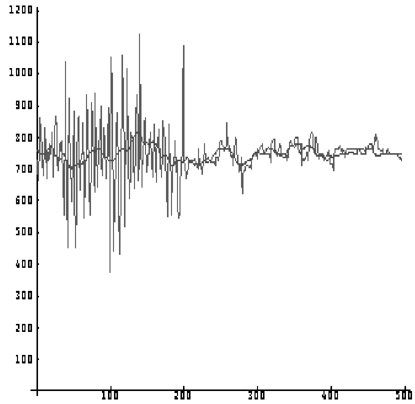

図 2: 変数１ー実数と回帰

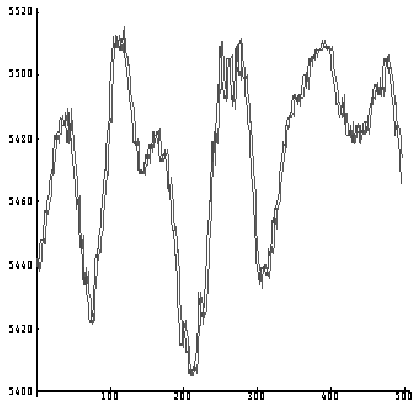

図 3: 変数２ー実数と回帰

2.1.1　参考文献

北川源四郎 多変量時系列モデル [時系列解析の方法] 朝倉書店 1998

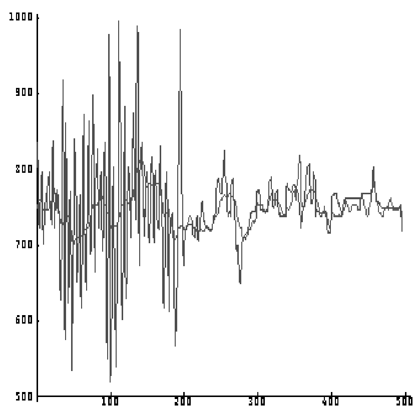

図 4: 変数３ー実数と回帰