JAPLA 研究会資料　2023/4/14 柏市パレット柏　ルーム A

Ｊで連分数を活用しよう

西川　利男

まず、連分数とは次のような数式である。

$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}}$$

　連分数は数値計算、整数論などで思わぬ威力を発揮するが、小中学校の数学では教えられていない。その理由を考えてみると、まず電卓のキーには備えられていない。さらに BASIC, C などのプログラミング言語でもサポートされていないことによると思われる。

　Ｊ言語ではこの後、示すように連分数はごく簡単に扱える。

また最近、次のような本を見つけた。[1]

[1] 木村俊一「連分数のふしぎ－無理数の発見から超越数まで－」
　　講談社ブルーバックス(2012).

本題に入る前に、Ｊプログラミングの基本のことを少し述べたい。

１．Ｊプログラミング言語について－演算順序など

　Ｊは純粋の関数型言語である。つまり、演算を続けて行うときは、右から左へとおこなう。一般の数学演算は、ふつうは左から右への順でおこなう。

　いろいろなプログラミングについて、見てみる。

　ＬＩＳＰ　生粋の関数型言語。演算順序は右から左へと行う。

　Ｃは関数型言語の形をしているが徹底していない。手続き型言語である。

　BASIC，FORTRAN など大部分の言語は手続き型言語である。最近の言語 Python なども手続き型言語である。演算順序は普通の数学の式と同様、左から右への方向でおこなう。

２． Ｊによる分数の表示、演算、小数への相互の変換などの実際

$\frac{1}{2}$ や $\frac{2}{3}$ はこのように表す。

1/2 や　2/3 とは記さない。

```
   1r2
1r2
   2r3
2r3
```

・演算はつぎのようにおこなう。

```
   1r2 + 2r3
7r6
   1r2 + 1r3
5r6
   2 － (1r2 + 1r3)
7r6
```

・もちろん、混合演算も可能である。

```
   0.5 + 1r3
0.833333
   0.5 – 1r3
0.166667
```

・小数から分数へはつぎのようにおこなう。

```
   x: 0.5
1r2
   x: 0.3
3r10
```

・分数から小数へはつぎのように行う。

```
   1%2
0.5
   1%3
0.333333
   2%3
0.666667
   1%7
0.142857
```

小数点以下をもっとくわしく求めたいときは、次のようにする。

```
   12j10": 1%7
0.1428571429
```

ここで、12j10 ":　は全体文字数 12 で、小数点以下 10 桁の文字列で表すことを示す。

３．いろいろな例

・分数によるπの近似式

$\dfrac{22}{7}, \dfrac{355}{113}$　など

```
   10j8": 22%7
3.14285714
   10j8": 355%113
3.14159292
```

・連分数の計算

最初にあげた連分数 x の値はつぎのようにして、計算される。

```
   1%3 + 1%1 + 1%1 + 1%2 + 1%4
0.278481
```

Ｊの演算順序が右から左へとなることに合わせて、そのまま入力すればよい。

連分数がＪではいかに手軽に計算されるか分かるであろう。

４．ラマルジャンによるπの近似計算

前出の本[1]の p.195 にインドの神秘的天才数学者ラマルジャンによるπの近似式として以下のような連分数による式があげられていた。　途中に 16539 という数があるが、どうやってこんな式をみつけたのか書き記していない。

$$\pi^4 = 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16539 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}$$

これを J の分数計算の力でやってみよう。

```
   20j18 ": 4%: 97 + %2 + %2 + %3 + %1 + %16539 + %1 + %6
3.141592653589793100
```

なお、ここで 4%: は 4 乗根をとる計算である。

ラマルジャンもすごいが、 J の分数計算の威力もまた偉大である。