ペラン数と偽素数

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2023 年 12 月 7 日

目次

1 ペラン素数

1876 年にルカが 1899 年にペランがこの数列を見つけた。1982 年にアダムスとシャンクスがこの数列を研究しペラン数列と名付けた。（ルカには素数でルカ数列がある）

$$P(0) = 3, P(0) = 1, P(2) = 2$$
$$P(n) = P(n-2) + P(n-3) \qquad n > 2$$

ペラン数は素数の発生器である。これがどこまで正しいか、アダムスとシャンクスが追求し、素数が 271441、ペラン数列が 33150 桁で初めて破綻する。10 億までに 17 個存し、ペラン数も無限にある。

J でスクリプトを作ってみよう。

```
   perrin01=: 3 : 0
NB. Usage: perrin01 30
p0=:  3 0 2x NB. initial 3 pieces
for_ctr. i.  y * 1x do.
 p=.  +/ (ctr,ctr+1) { p0
 p0=. p0,p
end.
 (i. # p0),. p0
)
```

```
perrin=: 3 : 0
NB. perrin sequence
NB. usage: perrin 100
tmp=. perrin01 y
tmp1=.tmp,. (1{"1 tmp)% 0{"1 tmp
ind=. 0= 1| 0, }.2{"1 tmp1
2 }.(I.ind){tmp1
)
```

数のどこかに x を付けておくと、メモリも拡張数になる

```
n   P(n)    P(n)\% n
------------------
 0    3        _
 1    0        0
 2    2        1
 3    3        1
 4    2      0.5
 5    5        1
 6    5 0.833333
 7    7        1
 8   10     1.25
 9   12  1.33333
10   17      1.7
11   22        2
12   29  2.41667
13   39        3
14   51  3.64286
15   68  4.53333
16   90    5.625
```

```
n   P(n)    \%
--------------------
17  119        7
18  158  8.77778
19  209       11
20  277    13.85
21  367  17.4762
22  486  22.0909
23  644       28
24  853  35.5417
25 1130     45.2
26 1497  57.5769
27 1983  73.4444
28 2627  93.8214
29 3480      120
30 4610  153.667
31 6107      197
32 8090  252.812
```

1.1 整数の取り出し

整数の取り出し。いろいろあるだろうが次が簡潔

```
  1| 0 1  2.3  4 5.3
0 0 0.3 0 0.3
```

```
   0=  1| 0 1  2.3  4 5.3
1 1 0 1 0

   I. 1 1 0 1 0
0 1 3
```

ペラン素数 (無限大が出る最初の項を 0 に入れ替えている)

```
  perrin 100
n         P(n)       P(n)\%n
---------------------------------
   perrin 100
  2             2            1
  3             3            1
  5             5            1
  7             7            1
 11            22            2
 13            39            3
 17           119            7
 19           209           11
 23           644           28
 29          3480          120
 31          6107          197
 37         33004          892
 41        101639         2479
 43        178364         4148
 47        549289        11687
 53       2968530        56010
 59      16042867       271913
 61      28153269       461529
 67     152149094      2270882
 71     468557684      6599404
 73     822261415     11263855
 79    4443758532     56250108
 83   13684979327    164879269
 89   73957919629    830987861
 97  701410194695   7231032935
101 2160059765855 21386730355
```

2　マトリクスでペラン数を求める

先ずはフィボナッチ数

```
   (0 1 ,:1 1)&(+/ . *) ^:(i.10) 1 1
 1  1
 1  2
 2  3
 3  5
 5  8
 8 13
13 21
21 34
34 55
55 89
```

ペラン数列でもやってみよう。(2 0 3 とする)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(n+2) \\ P(n+1) \\ P(n) \end{pmatrix}$$

```
   {:"1  (0 1 1,1 0 0 ,:0 1 0) &(+/ . *) ^:(i.20)  2 0 3

3 0 2 3 2 5 5 7 10 12 17 22 29 39 51 68 90 119 158 209
```

3 行目を使う

```
   perrin_mat 100
n     P(n)        P(n)\% n
--------------------------------
 2             2           1
 3             3           1
 5             5           1
 7             7           1
11            22           2
```

```
13           39          3
17          119          7
19          209         11
23          644         28
29         3480        120
31         6107        197
37        33004        892
41       101639       2479
43       178364       4148
47       549289      11687
53      2968530      56010
59     16042867     271913
61     28153269     461529
67    152149094    2270882
71    468557684    6599404
73    822261415   11263855
79   4443758532   56250108
83  13684979327  164879269
89  73957919629  830987861
97 701410194695 7231032935
```

```
  perrin_mat01=: 3 : 0
mat=.  0 1 1, 1 0 0 ,: 0 1 0
 {:"1  mat&(+/ . * ) ^:(i. y) 2 0 3x
)

perrin_mat=: 3 : 0
NB. perrin 100
tmp1=. (i. y),. perrin_mat01 y
tmp2=. }. tmp1 ,. ({: % {. )"1 tmp1
ind=.0= 1|  0, }. {: "1 tmp2
}. (I. ind){tmp2
)
```

3　ペラン偽素数

ペランの発生器で出した素数は快調だが 271441 で破綻する。メモリの関係で順には追えない。

アダムスとシャンクスが追求した。素数が 271441、ペラン数列が 33150 桁で初めて破綻する。ペラン偽素数は 10 億までに 17 個存し、ペラン数列も無限にある。

J では素数の検査には q : を用いる。

```
   |: q:  {."1 perrin_mat 100
0 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

    q: 271441
521 521
```

References

もっと感動する数学 Newton 2023/9