鏡映とメビウス変換

SHIMURA Masato

2023 年 4 月 12 日

目次

概要

メビウスはライプチッヒの天文台の終身台長で後年は同大学でも教えた。学生時代にガウスの天文学の講義は受けている。メビウスの輪は有名。

1 複素数の足し算と割り算

複素数は 2 元数である。数学では分かち書きをするが、多くの PC 言語は $3j2$ のように一つで表す。

- 足し算

$$(a + b_i) + (c + d_i) = (a + c) + (b + d)_i$$

```
  6j2 + 3j5
9j7
```

- 掛け算

$$(a_1 + a_2 i) \times (b_1 + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

```
 3j1 * 1j2
1j7
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 - 2 \to 1$$

$$6 + 1 \to 7$$

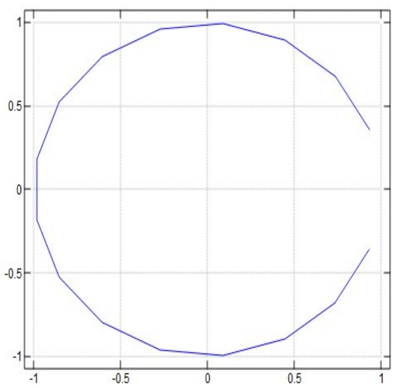
```
      ] a=: 3 1,.1 2
3 1
1 2
   +/ . * a
7
```

NB. 単項は power、 やっと使い道がわかった

- 極座標

$$r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1) \cdot r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2) = r_1r_2((cos\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2))$$

`plot r. 2p1*(i.17)%17` NB. ガウスの 17 角形



- 共役 $a + bi$ に対する
J の共役は + 実軸に対象となる。

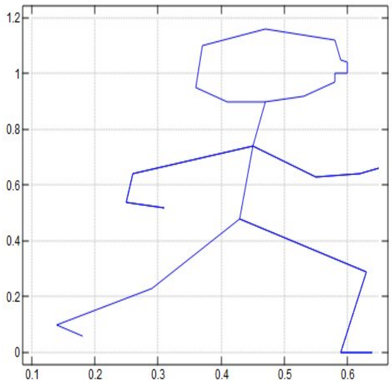
```
     +3j1
3j_1
```

- スチックラー博士

```
NB. -------object 2 Dr. Stickler--------------
NB. rightfoot
NB. foot
S01=: 1.8 0.6,1.4 1,2.9 2.3,4.3 4.8, 6.3 2.9, 5.9 0,: 6.4 0
S01=: S01,5.9 0,6.3 2.9,4.3 4.8,:4.5 7.4
NB. left hand
S02=: 2.6 6.4, 2.5 5.4,3.1 5.2,2.5 5.4 ,2.6 6.4,: 4.5 7.4
NB. righthand
S03=:5.5 6.3,6.2 6.4 ,6.5 6.6,6.2 6.4 ,5.5 6.3,: 4.5 7.4
NB. face
S04=: 4.7 9.0,4.1 9,3.6 9.5,3.7 11,4.7 11.6, 5.8 11.2,:5.9 10.5
S05=: 6.0 10.4,6.0 10.0,5.8 10.0, 5.8 9.7 ,5.3 9.2,:4.7 9.0
S10=: S01,S02 ,S03 ,S04,S05
S1=: 0.1 0.1 calc_elongm S10  NB. elong 1/10

NB. ----------------complex------------
SC1=:  mk_complex S1
mk_complex=: ({. j. {:)"1  NB. 2line matrix--> complex

   plot SC1
```



2　拡大. 縮小

- X 軸に対する拡大

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Y 軸に対する拡大

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

- 　x 軸、y 軸に対する拡大

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

3　鏡映

- X 軸への鏡映

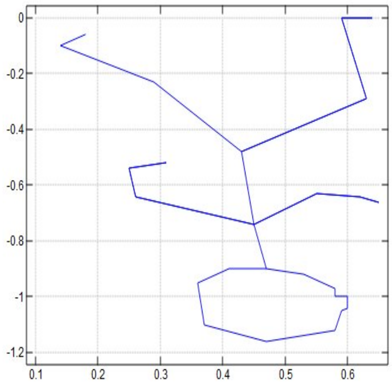
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

y 座標だけを-1 倍する変換なので、x 軸に関する折り返しを意味する

```
    a=: 1 0 ,: 0 _1

1  0
0 _1

 plot mk_complex  S1 +/ . * a
```



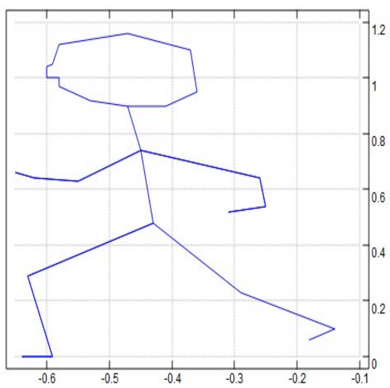
- Y 軸への鏡映

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

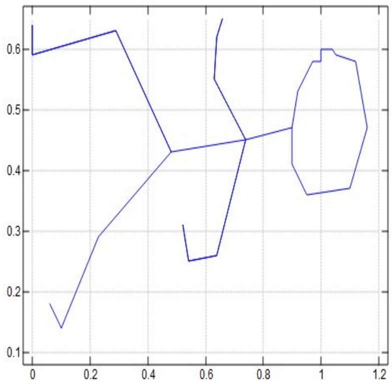
x 座標だけをー 1 倍する変換なので、y 軸に関する折り返しを意味する

```
b=: _1 0 ,: 0 1

   b
_1 0
 0 1
   plot mk_complex  S1 +/ . * b
```



- 原点をと通る直線との鏡映
  表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。
  任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ に移される。




```
plot mk_complex S1 +/ . *  0 1,: 1 0
```

原点を通る直線は $y = tan\theta$ で表すことができる。これは、次のように書き換えできる

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

整理すると次のようになる

$$\begin{pmatrix} cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & cos2\theta \end{pmatrix}$$

- 合成変換
  鏡映変換行列の Wolfram の項に紹介されていた
  - 反射 $y = 2 + x$
  - 射影行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - 変換 $(x, y) \to (y - 2, x + 2)$
  - 行列形式の変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1　鏡映ー円円対応

鏡が円になっている。ここに円を映すとどうなるか。3 次元と 2 次元で考える。
複素数の出番である。
2 次元の場合
原点を通る円に映る場合は直線となる
原点を外した円に映る場合は円になる
欲しいのは 2 次元で円になる場合である。
$w = z(f)$ を z について解き、$w = g(z)$ の形にする。
$z = g(z)$ をもとの式に代入して整理
有名パターンになればよし
ならなければ $z = x + iy$ と置いて軌跡の問題に帰着する。
例　Z は $|z - 1| = 2$ を動く。（1 を中心とする半径 2 の円)。
w が $w = \dfrac{1}{z}$ で表されるとき、w の軌跡は。

$$w = \frac{1}{z} \to z = \frac{1}{w} \to |\frac{1}{w} - 1| = 2 \to |1 - w| = 2|w| \to |w - 1| = 2|w|$$

1 からの距離と 0 からの距離が 2 : 1 になる点の軌跡

4　同時変換

変換前 (x, y)、変換後 (x', y') とする。
このとき、変換前に対称な位置に移動する変換式は、同次座標 $(x, y, 1)$ を用いて次のように表すことができる

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

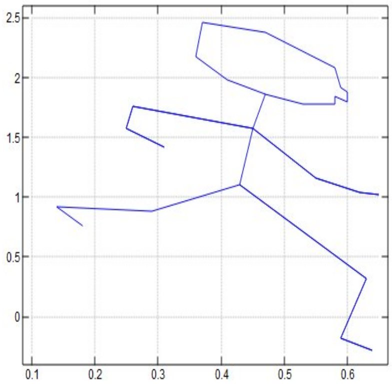
表現行列や他の箇所（右下の 1 は除く）に回転や拡大の数を入れたり、重ねたりすれば同時方程式は色々に表現できる
上の例では

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
   ] m0=:  0 1 _2 ,1 0 2,:0 0 1
0 1 _2
```

```
1 0  2
0 0  1

   plot mk_complex }."1(S1,.1)+/ . * m0
```



原点を中心に θ だけ反時計回りに回転させる変換は、同次座標 $(x, y, 1)$ を用いて下のように表せる。

$$= \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & t_x \\ sin\theta & cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} scos\theta & -ssin\theta & t_x \\ ssin\theta & scos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5　メビウス変換

- 式

$$f(x) = \frac{az + b}{cz + d}$$

  a, b, c, d は $ad \neq bc$ である複素数

- メビウス変換は行列で表すことができる

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- $c = 0$ のとき

$$f(z) = \frac{a}{c} z + \frac{b}{d}$$

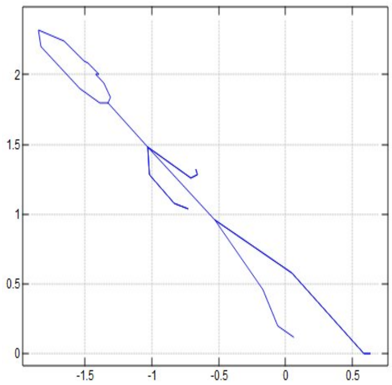
  相似拡大と回転、平行移動

- $c \neq d$ のときは平行移動、反転、相似拡大と回転、平行移動の 4 つを合成した関数である

```
 a1 =: 1 0 ,: _2j1 1

   1 0
_2j1 1

 plot mk_complex S1 +/ . * a1
```



複素数を使えば、平行移動は $z+a$, 回転と拡大は $re^{i\theta}z$, 反転は $\dfrac{1}{z}$ という一次分数で表すことができる