

## Jで分数計算をリバイバル活用する — 時計算と連分数 —

西川 利男

いま、学校の数学では分数計算は過去のものとして、忘れ去られようとしている。普通の電卓では、結果は  $x.xx.xxx$  と小数で表示され、これでこと足りるとされている。BASIC, C, Python などプログラミング言語でもこれは同じである。プログラムを組めば出来ないことはないが、分数計算は必要ないというのか。

J は分数計算が手軽にできる数少ないプログラミング言語の一つである。この J の機能を使って、時計算と連分数に適用し、分数をリバイバル活用してみた。[1], [2]

### 1. J 言語による分数演算

J では、例えば分数  $\frac{2}{3}$  は `2 r 3` のように記す。

従って、例えば

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \quad \text{は} \quad 2r5 + 3r5 \Rightarrow 1 \quad \text{となる。}$$

#### ・分数の通分しての計算

$$1r2 + 1r3 \Rightarrow 5r6$$

$$1r4 - 1r5 \Rightarrow 1r20$$

#### ・分数の約分 $3r12 \Rightarrow 1r4$

#### ・小数から分数へ

$$x: 0.25 \Rightarrow 1r4$$

#### ・分数から小数へ

$$_1 x: 1r4 \Rightarrow 0.25$$

$$_1 x: 1r3 \Rightarrow 0.333333$$

$$_1 x: 1 + 1r2 + 1r3 \Rightarrow 1.8333$$

#### ・分数と小数との混合演算

$$0.5 + 1r3 \Rightarrow 0.833333$$

[1] 西川利男「Jで連分数を活用しよう」JAPLA 研究会資料 2023/4/14 パレット柏

[2] 木村俊一「連分数のふしぎ」講談社ブルーバックス B-1770 (2012).

・仮分数(improper fraction)から帯分数(mixed fraction)

これは、Jのprimitiveだけでは、うまくいかなかったので、次の関数を定義した。

fract =: 3 : 0

'q r' =. y.

(<. q%r), (r|q), r

)

fract 4 3 => 1 1 3 ... これを  $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$  と読み替える。

1+1r2+1r3 => 11r6    fract 11 6 => 1 5 6 ... したがって  $1\frac{5}{6}$

なお、Jではprimitiveとして次の演算が備えられている。

10 % 3 => 3.33333 (10 割る 3)

3 | 10 => 1 (10 を 3 で割った余り)

## 2. 時計算（とけい算）

かつて小学校5，6年で鶴亀算とならんで教えられた時計算というのがある。たとえば、3時15分を少し過ぎると時計の短針と長針とが重なる時刻がある。それは3時00分00秒か？ という問題である。ある列車が3時に駅を出た後、自動車で追いかける。追いつける時刻は3時00分00秒か？ というのと同じ問題である。

時計は分、秒の60を分母とする60進法の分数計算であり、思ったより面倒である。ここである人の声があった。「今どき、針の時計などないよ。デジタル時計なので短針、長針が重なるなど見たことも考えたこともない。」

### 2. 1 Jによる時計算—プログラムの考え方と実行例

時計の長針は60分角動くのに対して、短針は5分角動く。また、短針の初期値は1時なら5分角、2時なら10分角、のようになる。一方、つねに長針の初期値は常に0分角である。したがって、速度の異なる車の追いかけてこの問題と同じである。

したがって、方程式で解くことができる。この際、分母60の分数計算で行うことが必要である。ここで、Jの分数計算が発揮される。これを分単位、秒単位で行えば時計算の計算が行えることになる。

実行すると次のようになる。途中の計算も表示した。13時以降でも可能である。Jのプログラムは最後にしめす。

#### ・ 4時から5時の間で長針と短針とが重なる時刻

tokeizan 4

Solve:  $60x=20+5x$

4時 1200/60 分

21 45 55

21 分 45\*60/55 秒

21 分 2700/55 秒

49 5 55

49

1 11

1/11

21 分 49 · 1/11 秒

長針と短針とが一致する時刻:

4時 21 分 49 · 1/11 秒

・ 5時から6時の間で長針と短針とが重なる時刻

tokeizan 5

Solve:  $60x=25+5x$

5時 1500/60分

27 15 55

27分  $15 \cdot 60/55$  秒

27分 900/55 秒

16 20 55

16

4 11

4/11

27分  $16 \cdot 4/11$  秒

長針と短針とが一致する時刻:

5時 27分  $16 \cdot 4/11$  秒

・ 10時から11時の間で長針と短針とが重なる時刻

tokeizan 10

Solve:  $60x=50+5x$

10時 3000/60分

54 30 55

54分  $30 \cdot 60/55$  秒

54分 1800/55 秒

32 40 55

32

8 11

8/11

54分  $32 \cdot 8/11$  秒

長針と短針とが一致する時刻:

10時 54分  $32 \cdot 8/11$  秒

・ 11時から12時の間で長針と短針とが重なる時刻

tokeizan 11

Solve:  $60x=55+5x$

11時 3300/60分

60 0 55

60分  $0 \cdot 60/55$  秒

60分 0/55 秒

0 0 55

0

0 1

0/1

60分  $0 \cdot 0/1$  秒

長針と短針とが一致する時刻:

11時 60分  $0 \cdot 0/1$  秒

### 3. 連分数のいろいろ

#### 3. 1 連分数を小数にする

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = 1.3114754$$

- ・ J の演算の順序は 右から左へとおこなう。
- ・ J の演算操作は 次の記号でなされる。

- ・ 逆数をとる … %
- ・ 数=小数 の 小数点より上、整数部分は … <.
- ・ 数=小数 の 小数点より下、小数部分は … ]-<.

これを使って、連分数を小数にする計算を 1 ステップずつやってみよう。

まず一番内側の  $1/3$  に 1 を加える

$$1 + \% 3$$

1.33333

この逆数をとる。

$$\% 1 + \% 3$$

0.75

次にこれに 4 を加える。

$$4 + \% 1 + \% 3$$

4.75

この逆数をとる。

$$\% 4 + \% 1 + \% 3$$

0.210526

つぎに 3 を加える

$$3 + \% 4 + \% 1 + \% 3$$

3.21053

さらにこの逆数をとる。

$$\% 3 + \% 4 + \% 1 + \% 3$$

0.311475

最後に 1 を加える。

$$1 + \% 3 + \% 4 + \% 1 + \% 3$$

1.31148

このようにして、最初の連分数は小数で表示された。

### 3. 2 きれいな小数点以下の数

つぎのような連分数による面白い数がある。

$$1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}$$

これを小数表示してみよう。

$$1 + \%4$$

$$1.25$$

$$\%1 + \%4$$

$$0.8$$

$$3 + \%1 + \%4$$

$$3.8$$

$$\%3 + \%1 + \%4$$

$$0.263158$$

$$4 + \%3 + \%1 + \%4$$

$$4.26316$$

$$\%4 + \%3 + \%1 + \%4$$

$$0.234568$$

$$1 + \%4 + \%3 + \%1 + \%4$$

$$1.23457$$

$$(50j40)": (100x)\%(81x)$$

$$1.2345679012345679012345679012345679012346$$

小数点以下、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 0 と並ぶが 8 がない。そしてこれは循環小数である。



### Jによる時計算—プログラム

NB. 時計算と分数計算

NB. 仮分数を帯分数に直す

NB.  $1200 \frac{45}{55}$

NB.  $\frac{1200}{55} \Rightarrow 21 \frac{45}{55}$

NB.  $55 \frac{45}{55}$

NB. `fract 1200 55`

NB. `21 45 55`

`fract =: 3 : 0`

`'q r' =. y.`

`(<. q%r), (r|q), r`

)

NB. 例: 4時から5時までの間で短針と長針が重なる時刻を求める

NB.  $x$ 時が  $y$ 分角に相当すると考える

NB. 長針(分針):  $y = 60x \dots\dots 0$ 分角を始点として速度60分角で動く

NB. 短針(時針):  $y = 5x + 20 \dots\dots 20$ 分角(4時)の位置から速度5分角で動く

NB.  $60x = 5x + 20 \dots\dots\dots$  両方の位置が一致する、つまり重なる。

NB.  $55x = 20$  を方程式として解けば良い。

NB.  $20$

NB.  $x = \frac{20}{55}$  時

NB.  $55$

NB.  $20$

NB.  $x = \frac{20}{55} * 60$  分

NB.  $55$

NB.  $1200$

NB.  $x = \frac{1200}{55}$  分

NB.  $55$

NB. `fract 1200 55`

NB. `21 45 55`

NB.  $45$

NB.  $x = 21 \frac{45}{55}$  分

NB.  $55$

NB.  $45$

NB.  $x = 21 \frac{45}{55} * 60$  秒

NB.  $55$

NB.  $2700$

NB. x = 21分----- 秒  
 NB. 55  
 NB.  
 NB. fract 2700 55  
 NB. 49 5 55  
 NB. 5  
 NB. x = 21分49 ---- 秒  
 NB. 55  
 NB. 1  
 NB. x = 21分49 ---- 秒  
 NB. 11

次のようなJの動詞を定義した。

```

wr =: 1!:2&2
tokeizan =: 3 : 0 NB. revised 2020/7/14
HH =. 12|y. NB. 短針(時針): 分角単位
wr 'Solve: 60x=', ('': 5*HH), '+', ('':(5)), 'x'
MM =. HH*5*60
wr ('': HH), '時', ('': MM), '/60 分'
wr SS =. fract MM, 55
wr ('': 0{SS), '分', ('': 1{SS), '*60/55 秒'
wr ('': 0{SS), '分', ('': (1{SS) * 60), '/55 秒'
wr SSS =. fract ((1{SS) * 60), 55
wr (0{SSS)
wr SSSS =. yakubun (1{SSS), (2{SSS)
wr ('': 0{SSSS), '/', ('': 1{SSSS)
wr ('': 0{SS), '分', ('': 0{SSS), '・', ('': 0{SSSS), '/', ('': 1{SSSS), '秒'
wr '長針と短針とが一致する時刻:'
wr ' ', ('': HH), '時', ('': 0{SS), '分', ('': 0{SSS), ', '・', ('': 0{SSSS),
', '/', ('': 1{SSSS), '秒'
,,
)yakubun =: 3 : 0
'PP QQ' =. y.
(PP, QQ) % (PP +. QQ)
)

```