

ヴィエトの数学

SHIMURA Masato

2022年7月30日

目次

1	ヴィエトの数学	1
2		6

はじめに

ヴィエトの仕えたのはバロア朝のアンリ三世とブルボン朝のアンリ4世。フランスの激動期である。アンリ4世はナントの勅令を出し(1598)、自身はプロテスタントからカトリックに改宗して、両派の融和に努めた。また、暗号解読の名手で、ヴィエトに翻弄されたスペイン国王は、ローマ法王にフランスは黒魔術を使っていつと嘆願したほどである。

ヴィエトは、古代ギリシャの数学者が代数の出し惜しみをして、幾何に邁進したと考えていたようだ。代数の確立を目指すのがヴィエトの目標であった。

1 ヴィエトの数学

全貌を示すことはむづかしい。Jでフォローできるものにかぎろう。

1.1 直角三角形の合成

ヴィエトの基本は三角形の加法定理である。

1) 斜辺が1の直角三角形 x (他の辺は $\sin x$ と $\cos x$) \Rightarrow 斜辺を $\cos y$ になるように縮小

する。(他の辺は $\cos y \sin x$ と $\cos y \cos x$)

2) 斜辺が 1 の直角三角形 y (他の辺は $\sin y$ と $\cos y$)

1) を下にして, 2) を上に, $\cos y$ で張り合わせる

$$\sin(x + y) = (\sin x \cos y) + (\cos x \sin y)$$

$$\cos(x + y) = (\cos x \cos y) - (\sin x \sin y)$$

$$(\sin 0.3 + 0.5)$$

0.717356

$$((\sin 0.3) * \cos 0.5) + (\cos 0.3) * \sin 0.5$$

0.717356

$$(\cos 0.3 + 0.5)$$

0.696707

$$((\cos 0.3) * \cos 0.5) - (\sin 0.3) * \sin 0.5$$

0.696707

$$(\sin 0.3) + \sin 0.5$$

0.774946

1.2 倍角の公式

$$\sin nx = \sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x$$

$$\cos nx = \cos(n-1)x \cos x - \sin(n-1)x \sin x$$

$$\sin 3 * 0.3$$

0.783327

$$((\sin 2 * 0.3) * \cos 0.3) + (\cos 2 * 0.3) * \sin 0.3$$

0.783327

$$\cos 4*0.3$$

$$0.362358$$

$$((\cos 3*0.3)*\cos 0.3)-(\sin 3*0.3)*\sin 0.3$$

$$0.362358$$

1.3 π

$$\cos \frac{360}{16} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\cos \frac{360}{32} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

$$\cos \frac{360}{64} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}}}$$

$$\pi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}}}}$$

$$a = 2*2$$

$$b = 0.5 + 2*2$$

$$c = 0.5 + 0.5*0.5 + 2*2$$

$$d = 0.5 + 0.5*0.5 + 0.5*0.5 + 2*2$$

a

$$2.82843$$

b

$$0.92388$$

c

$$0.980785$$

d

0.995185

b*c*d

0.901764

a% b*c*d

3.13655

この時代ではいい線いっている。

1.4 ファン・ローメンの問題

オランダのファン・ローメンが次の問題を出していた。オランダの大使がアンリー 4 世に謁見したときに言った。「この問題が解けるフランス人はいないでしょう」帰り際にオランダ大使に一枚の紙が渡された。この後ヴィエトとファン・ローメンは親しくなった。

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} \\ - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} + 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} \\ + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740295x^{35} \\ + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = A$$

$$a0) A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \text{ ならば}$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$a1) A = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}}} \text{ ならば}$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$$

$$a2) A = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ ならば}$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{\frac{3}{16} + \sqrt{\frac{15}{16} + \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}}}}}$$

$$a4) A = \sqrt{1 + \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16} - \sqrt{1 + \frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}} \text{ のときの } x \text{ を求めよ}$$

$$a0) 2\sin\frac{\pi}{96}$$

```
2 * sin 1p1 % 96
0.0654382
x0
0.0654382
```

a1) a1=: %:2+ %: 2 - %: 2 - %: 2+ %: 2 - %:2 の間違い

$$A = 2\sin\frac{45\pi}{128}$$

$$x = 2\sin\frac{\pi}{128}$$

多項式は J の得意とするところであり、45 次でも解いてしまう。

多項式は J の得意とするところであり、45 次でも解いてしまう。

```
p0=: 45 0 _3795 0 95634 0 _1138500 0 7811375 0 _34512075 0 105306075 0 _232676280
p1=: 384942375 0 _488494125 0 483841800 0 _378658800 0 236030652 0 _117679100 0
p2=: 46955700 0 _14945040 0 3764565 0 _740259 0 111150 0 _12300 0 945 0 _45 0 1
```

```
px=: p0,p1,p2
```

```
a0=: %:2+ %: 2+ %: 2+ %: 2
```

```
x0=: %:2- %: 2+ %: 2+ %: 2+ %:3
```

```
a1=: %:2+ %: 2 - %: 2 - %: 2+ %: 2 - %:2
```

```
x1=: %:2- %: 2+ %: 2+ %: 2+ %:2 + %:2
```

```
a2=: %: 2+ %: 2
```

```
x2=: %: 2- %: 2+ (%: 3%16)+ (%: 15%16)+ %: (5%8) - %:5%64
```

答えは 45 次もあるが、代表的な数値だけ書いておく。

```
p, a0,px
```

_2.00066 1.98296

解は次の通り。45 次多項式を解いてはいない。

n が奇数の場合は $2\sin nx$ は $2\sin x$ の整数係数の多項式としてあらわされる。ファン・ローメンの多項式は $x = 2\sin\theta$ として、 $2\sin 45\theta$ を x の多項式として表したものである。

$A = 2\sin 45\theta$ となるとき、 $2\sin\theta$ を求めよ、言い換えれば角度を 45 等分せよという問題であった。

$$a0) 2\sin\frac{\pi}{96}$$

$$2 * \sin 1p1 \% 96$$

0.0654382

$$x0$$

0.0654382

a1) a1=:%:2+ %: 2 - %: 2 - %: 2+:%: 2 - %:2 の間違い

$$A1 = 2\sin\frac{45\pi}{128}$$

$$x1 = 2\sin\frac{\pi}{128}$$

$$2 * \sin (45 * 1p1) \% 128$$

1.78645

$$2 * \sin 1p1 \% 128$$

0.0490825

2

ヴィエトは死ぬ前に暗号の方法を宰相のリシュリュウに伝えたといわれるが、その方法は分っていない。

References

木村俊一「天才数学者はこう解いた、こう生きた。方程式4千年の歴史」講談社選書メ
チエ 2001