ベイズ確率について

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2022 年 12 月 26 日

目次

1 はじめに

「学習エンジンとしてのベイズ確率」を 2008 年 5 月の JAPLA に投稿したがそれ以来となる。

ベイズ（1710 – 1761）はイングランドの牧師。長老派のプロテシタントだが、国教会ではなかったのでケンブリッジやオックスフォードには属していない

ベイズ確率は 1930 年頃から少しずつ盛んになり始め、やがて AI に組み込まれて来ている。

2 ベイズ確率

$$P(A \cap B) = \frac{P(B \cap A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

両辺を $P(B)$ で割ると

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

これがベイズ確率の基本式。$P(B|A)$ を事前確率。$P(A|B)$ を事後確率という。

さらに

$$P(A_j|B) = \frac{P((B|A_j)P(A)}{\sum P(B|A_j)}$$

ベイズの公式は色々変化する。

ベイス確率は事後確率を事前確率がら求める主観的方法である。

2.1　例　1

命中率 8 割の射手 A と 3 割の射手 B のどちらかが鹿を撃ち倒した。A か B かを推測せよ

解　1

$H_1 = A$ が射る。　$H_2 = B$ が射る。

$F =$ 鹿　X が射られる

事前確率を $H_1 = H_2 = \dfrac{1}{2}$ とする。

$P(F|H_1) = 0.8, P(F|H_2) = 0.3$ は与えられている。

$$P(H_1|F) = \frac{(\frac{1}{2})(\cdot 0.8)}{(\frac{1}{2})\cdot(0.8) + (\frac{1}{2})(\cdot 0.3)} = \frac{8}{11} = 0.73$$

A が射ったのは 73% 確かとなる

2.2　例　2-1

壺 H_1, H_2, H_3 がある。そこに赤玉: 白玉が、3:1,1:1,1:2 の割合で入っている。今、どの壺か触れずに取り出した球が赤であると告げられた。赤玉が H_1, H_2, H_3　である確率をのべよ

2-2 球を戻した後、再度各壺で赤を引く確率は？

解　2-1

壺　1，2，3 の確率は各々　$P(R|H_1) = \dfrac{3}{4} = 0.75,$

$$P(R|H_2) = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$P(R|H_3) = \frac{1}{3} = 0.33$$

である。

初回はどの壺かわからないので, 理由不十分の原則から $H_1 = H_2 = H_3$ と置く.

$$P(H_1)|R) = \frac{(\frac{1}{3})(\frac{3}{4})}{(\frac{1}{3})(\frac{3}{4}) + (\frac{1}{3})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3})(\frac{1}{3})} = \frac{9}{19} = 0.47$$

$$P(H_2|R) = \frac{6}{19} = 0.32$$

$$P(H_3|R) = \frac{4}{19} = 0.21$$

解　2-2

$$P(H_1|RR') = \frac{(\frac{9}{19})(\frac{3}{4})}{(\frac{9}{19})(\frac{3}{4}) + (\frac{6}{19})(\frac{1}{2}) + (\frac{4}{19})(\frac{1}{3})} = \frac{81}{133} = 0.61$$

$$P(H_2|RR') = \frac{36}{133} = 0.27$$

$$P(H_3|RR') = \frac{16}{133} = 0.12$$

2.3　例　3

問　3

或る病気の罹患率と検査陽性者の割合

	陽性	陽性でない
病気	99 ーセント	1 パーセント
病気でない	3 パーセント	97 パーセント

D さんが検査で陽性だった。D さんが病気の確率は？

解　3

事象　A 病気 , $\bar{A}$　健康

事象　B 検査結果が陽性　、$\bar{B}$ 検査結果が陰性

病気の確率

$P(A) = 0.001$

$P(\bar{A}) = 1 - 0.001 = 0.999$

病気の患者が検査を受けると陽性になる確率（事前確率）

$P(B|A) = 0.99$

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = 0.99 \times 0.001 = 0.00099$$

病気であるが検査結果が陰性になる確率

$$P(B|A) = 0.001 - \bar{0}.00099 = 0.00001$$

病気でないのに検査で陽性が出る確率は￥3

$P(B|\bar{A}) = 0.03$

$P(B)$ は 同時確率 $P(A|\bar{B})$ か $P(\bar{A}|\bar{B})$ のどちらかがわかれば計算できる

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.003 \times 0.999 = 0.02997$$

検査結果が陽性である周辺確率 $P(B)$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A \cap B) = 0.00099 + 0.002997 = 0.03096$$

陽性で病気にかかっている確率

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.99 \times 0.001}{0.03096} = 0.0320326$$

事前確率 (病気であるのに何も検査をしない確率）は 0.1% であったから 3% はおおきい

References

松原　望「入門　ベイズ統計」2008 東京図書

渡部　洋「ベイズ統計学入門」1999　福村出版

https://codezine.jp/article/detail/14581