幾つかの微分方程式モデルについて

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2021 年 11 月 6 日

目次

1	ロレンツモデル	1
2	マルサスモデル	2
3	技術革新の普及モデル	3
4	魚の生育モデル	4
5	ルンゲクッター法	5

はじめに

微分方程式について、日経ソフトウエア 2021 年 5 月号に桜井進氏が「Python で微分方程式を極める」という記事を書いている。桜井はマルサスモデル、技術革新の普及モデル、魚の成長モデルの 3 本の微分方程式について、厳密解, オイラー法、ルンゲクッター法の解を求め、ルンゲクッター法は厳密解と変わらないと結論ずけている。

1 ロレンツモデル

始めにロレンツモデルで練習する。

$$\begin{cases} X' = & -\sigma X & +\sigma Y & \\ Y' = & XZ & +\gamma X & -Y \\ Z' = & XY & -bZ & \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\sigma: & \text{ブランドル数：} & 10 \\
\gamma: & \text{レイリー数：} & \dfrac{3}{8} \\
b: & \text{系の物理サイズ：} & 28
\end{cases}
$$

1.1 簡易型

ロレンツモデルの数値化。ルンゲ・クッター法を用いない簡易型。オイラー法である。

```
NB. ====================================
NB. Lorenz Function & its 3-D Display
NB.   original by Kiyoshi Yamashita
NB.   revised by Toshio Nishikawa

dt =: 0.005
s =: 10
r =: 50
b =: 8 % 3

init =: 5 8 10

lorenz=: 3 : 0
'x0 y0 z0'=. y
X =. x0 + dt*s*(y0-x0)
Y =. y0 + dt*((r*x0) - (y0+x0*z0))
Z =. z0 + dt*((x0*y0) - b*z0)
X, Y, Z
)
```

2 マルサスモデル

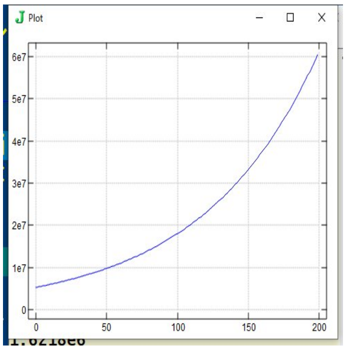
マルサス (1766-1834) はイギリスの経済学者である。彼のアイデアに基づき定式化したもの。

微分方程式モデル

$$\Delta N = aN\Delta t - bN\Delta t = (a-b)N\Delta t$$

```
NB. k=(a-b)
dt=: 1
k=: 0.306
```

```
malthus=: 4 : 0  NB. OK
'dt k'=. x
x0=. y
XX=. x0+dt*k*x0
)
```



3　技術革新の普及モデル

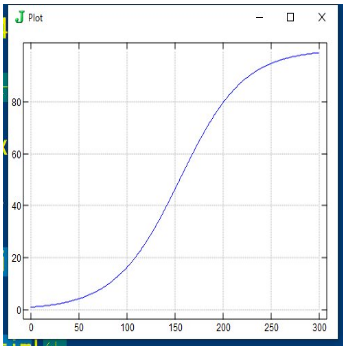
シュンペーター（1883-1950）の 1912 年の著書「経済発展の理論」で提唱された理論の内の「新しい生産方式の導入」で、A 社が先行して新しい生産方式を導入して、他社を引き離して利潤を上げるが、直ぐに他社も追従してきて、利潤が S カーブを描くというものである。

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

```
NB. dt=0.01
NB. k=0.03
NB. N=100
NB. x0=1
schumpeter=: 4 : 0
NB.
'dt k N' =. x
x0=. y
Xx=. x0+dt*k*x0*(N-x0)
)
```

```
a=. 0.01 0.03 100 schumpeter ^:(i.300) 1
```

```
   plot a
```



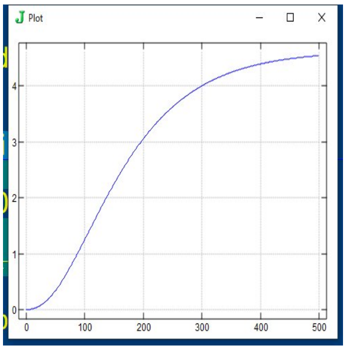
4　魚の生育モデル

生物学者ベルタランフィ (1901-1972) によるモデルで、時刻 t における魚の体重 w(t) は、栄養分摂取による体重の増加 (a*体重 w の 2/3 乗) と、栄養消費による体重の減少 (b-体重 w）により決まるとする。

$$\frac{dw}{dt} = aw^{\frac{2}{3}} - bw$$

```
NB. a=5.b =1
NB.x0= init=.0.001
fish=: 4 : 0
'dt a b '=. x
x0=. y
XX=.x0+dt*((-b*x0)+a*x0^(2r3))
)

a=. 0.01 5 3 fish ^:(i.500) 0.001
   plot a
```



5　ルンゲクッター法

ルンゲクッター法は C.Reiter のモデルを基に改良を加えた。

5.1　ルンゲ・クッタ法

```
LZ=: 1 : 0
M=.((-S),S,0 0 0),R,_1 0 0 _1,: 0 0 ,(-B),1 0
M&(+/ . *)@(],{. * }.)
```

掛け算限定のモデルである

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & y & z & xy & xz \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ -S & S & 0 & 0 & 0 \\ -R & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -B & 1 & 0 \end{array}\right.$$

lz=: (10,(8
([,{. * }.) 0.1 0.2 0.3 --> 0.1 0.2 0.3 0.02 0.03
1z 0.1 0.2 0.3 ---> 1 2.57 0.78

```
NB. Runge-Kutter by C.Reiter
NB. Slightly modified By M.Shimura
NB. usage:  0.02 lz RK ^:(i.10000) 0.1 0.2 0.3
RK=: 1 : 0
:
h2=: -: x NB. 0.02
k1=: u y
```

```
k2=: u y +h2 * k1
k3=: u y +h2 * k2
k4=: u y + (+: 0.01) * k3
y+((+: 0.02)% 6)*k1 + k4 ++: k2+k3
)
```

```
 0.02 lz RK ^:(i.10) 0.1 0.2 0.3
```

各モデルともパラメータはオイラー法と同様である

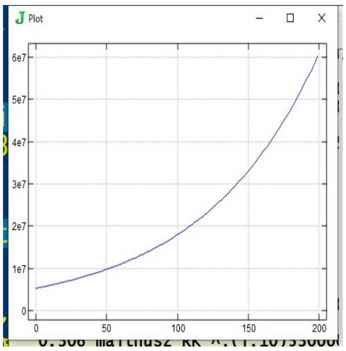
5.2　マルサスモデル

掛け算のみなのでうまく流れる。

```
malthus2=: 1 : 0
k=. m
M=.k
M&(+/ . *)@[
)
```

```
a=. 0.02(  0.306 malthus2) RK ^:(i.10)5300000

   plot a
```



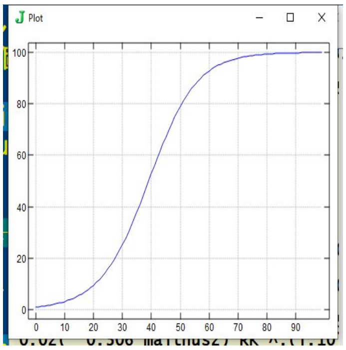
5.3　シュンペーターモデル

これは掛け算 3 個が連続するもので手間取った。もっと良い方法があるだろう。

NB. runge^kutter method

```
schumpeter2=: 1 : 0
'k N'=: m
M1=.(N-[)*k*[
)
```

```
 a=.0.02 (0.03 100 schumpeter2) RK ^:(i.100) 1
```



5.4　魚の生育モデル

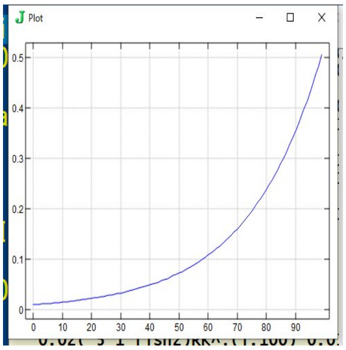
C.Reiter のモデルに近いが dfrac23 を含む連続した掛け算がある。

```
 FISH2=: 1 : 0
'a b'=. m
M=: (-&b),(*&a)@(^&2r3)
 M&+/@:[
)

fish2=: 5 1 FISH2

  5 1 fish2  0.01
0.01

0.02 fish2 RK ^:(i.200) 0.01
```


Plot
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90