JAPLA 研究会資料 2020/6/2

Ｊで関孝和の方陣をプログラムする
五方陣、七方陣、九方陣、…

西川　利男

江戸、寛永年間に活躍した和算の大家、関孝和は同時代のニュートンに比肩する日本人数学者の誇りである。

関孝和は算木に代わる筆算の点竄（てんさん）術の創始から円理などあらゆる数学分野で有名である。

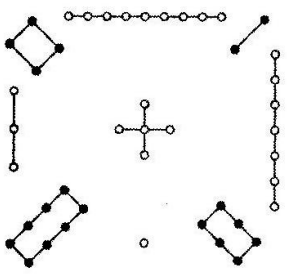
その関孝和が非常にユニークな方法で魔方陣を作っている。たまたま見つけた下記の書[1]に解説されていた。それをもとに五方陣、七方陣、九方陣、…　とＪでプログラミングしてみた。魔方陣などと言わず単に方陣と呼んで、さめた見方に好感を感じる。

[1] 桐山光弘、歳森宏「江戸の日本人は数学好きだった」日刊工業新聞社(2006).

０．魔方陣とは

魔方陣とはタテ・ヨコ・ナナメの和が等しい数字の並びをいう、その最も基本となる三方陣は、古代中国でも古代オリエントでも古くから知られていたようである。以下は古代中国の伝説に由来するものである。[2]

[2] イアン・スチュアート、水谷淳訳「魅惑と驚愕の数たち」SB クリエーティブ(2016).



4	9	2
3	5	7
8	1	6

図 50　左：洛書。右：現代の表し方

１．関孝和の方陣－作成の原理

一般的に奇数の方陣、例えば5方陣N=5に共通する作成の原理はつぎのようにまとめられる。

(1) ステップ(い)操作…方陣の上段、右段に1から(N^2)/2までの数をセットする。

(2) ステップ(ろ)操作…方陣の下段、左段に残りの(N^2)までの数をセットする。

(3) ステップ(は)操作…方陣の周囲段の数を入れ替え調整する。

(4) ステップ(に)操作…一段下N-1、つまり3方陣の値は知られているとする。
これをN方陣(5方陣)の内部にはめ込むように値を調整する。

(5) ステップ(ほ)操作…周囲だけが出来ているN方陣(5方陣)の内部に
上の調整N-1方陣(3方陣)を埋め込む。これにより完成。

２．十三方陣の周囲段部分の作成－Jのプログラム実行を通して

アルゴリズムが良くわかるようにあえて大きいN=13で示してみる。

(1) ステップ(い)操作

```
   f0 13
24 23 22 21 20 19 11 10 9 8 7 1    2
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0    3
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0    4
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0    5
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0    6
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0   12
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0   13
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0   14
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0   15
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0   16
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0   17
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0   18
 0  0  0  0  0  0  0  0 0 0 0 0 146
```

上段と右段に1から24までの数を図のように入れる。半分ずつ入れる。

なお、Jのプログラムは最後に示した。

(2) ステップ(ろ)操作

十三方陣では、1から169(=13^2)の数を使う。したがって、上段と向かいあう下段の数との和は170(=1+169)になるよう入れる。すでに示したが、右下の値も、斜めの和170になるようできまる。

f1 13

24	23	22	21	20	19	11	10	9	8	7	1	2
167	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
165	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
164	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
158	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
157	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13
156	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14
155	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
154	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
153	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17
152	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18
168	147	148	149	150	151	159	160	161	162	163	169	146

(3) ステップ(は)操作

上段と下段の数、右段と左段の数の和を合わせるため数の入れ替えをおこなう。

f2 13

24	23	22	21	20	19	159	160	161	162	163	169	2
167	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
165	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
164	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
158	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	157
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	156
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	155
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	154
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	153
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	152
168	147	148	149	150	151	11	10	9	8	7	1	146

３．五方陣の作成－Ｊのプログラム実行を通して

方陣の周囲の値の作成方法がわかった上で、あらためて五方陣を作成する。

(1) ステップ(い)操作

```
   f0 5
8 7 3 1  2
0 0 0 0  4
0 0 0 0  5
0 0 0 0  6
0 0 0 0 18
```

(2) ステップ(ろ)操作

```
   f1 5
 8  7  3  1  2
22  0  0  0  4
21  0  0  0  5
20  0  0  0  6
24 19 23 25 18
```

(3) ステップ(は)操作

```
   f2 5
 8  7 23 25  2
22  0  0  0  4
 5  0  0  0 21
 6  0  0  0 20
24 19  3  1 18
```

(4) ステップ(は)操作

ここで、三方陣についてはすでに知られているものとする。

```
   Hojin3 =: 3 3$4 9 2 3 5 7 8 1 6
   Hojin3
4 9 2
3 5 7
8 1 6
```

```
NB. 修正三方陣の作成
NB. 内部の空白の値を埋めるため、三方陣を利用する
NB. 五方陣では、タテ、ヨコ、ナナメの各和は 65 でなくてはならない
NB.    (+/ 1, 2, 3, ... 25) % 5
NB.    (+/ >: i. *:5) % 5 => 65
NB. 五方陣の外側は、すでに求められている
NB.
NB.     8|      |2    ナナメの和を65にするには              8|         |2
NB.    --+---------       26 + (1 +(4 5 6)) = 37          --+--------+--
NB.      |4 9 2|          26 + (2 +(4 5 6)) = 40            |12       |
NB.      |3 5 7|            - - - -                        |    13   |
NB.      |8 1 6|          26 + (8 +(4 5 6)) = 65            |       14|
NB.    --+-----+---     とすればよい                       --+--------+--
NB.    24|      |18                                       24|         |18
NB. すなわち、三方陣の各値を8(=12-4)だけ、かさ上げする
NB.    65 - 26 => 39
NB.    +/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 => 45
NB.    45 % 3 => 15
NB.    39 - 15 => 24
NB.    24 % 3 => 8
NB.   三方陣 M3 の各値を8 ずつ増やす
```

左引数として既知の値、三方陣Hojin3をとり、動詞f3により調整三方陣を得る。

```
   Hojin3 f3 5
12 17 10
11 13 15
16  9 14
```

(5) ステップ(ほ)操作

すでにステップ(は)操作で五方陣の周囲段だけは出来ている。

この五方陣の内部に、直前のステップ(は)操作によって得た修正三方陣を埋め込む。

```
   Hojin3 f4 5
 8  7 23 25  2
22 12 17 10  4
 5 11 13 15 21
 6 16  9 14 20
24 19  3  1 18
```

これで、五方陣が完成した。

なお、以上の各操作を一度でまとめておこなう、つまりある次数の方陣を計算する動詞hojinを以下のように作った。

```
NB. 方陣作成プログラム ========================================
NB. Usage:
NB.    五方陣 Hojin3 hojin 5
NB.           Hojin5 =: Hojin3 hojin 5
NB.    七方陣 Hojin5 hojin 7
hojin =: 3 : 0
:
HH =. x.
N =. y.
M =. f0 N
M =. f1 N
M =. f2 N
M =. HH f3 N
M =. HH f4 N
)
```

出来上がった5方陣をHojin5として保存する。

```
   Hojin5 =: Hojin3 hojin 5
 8  7 23 25  2
22 12 17 10  4
 5 11 13 15 21
 6 16  9 14 20
24 19  3  1 18
```

４．五方陣のタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

```
  NB. タテの和
   +/ Hojin5
65 65 65 65 65
NB. ヨコの和
   +/"(1)  Hojin5
65 65 65 65 65
NB. ナナメの和
   ( (<0, 0), (<1, 1), (<2, 2), (<3, 3), (<4, 4) ) { Hojin5
8 12 13 14 18
   +/ ( (<0, 0), (<1, 1), (<2, 2), (<3, 3), (<4, 4) ) { Hojin5
65
```

５．七方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

７方陣はすでに得た５方陣の値を利用して、求められる。

```
   Hojin7 =: Hojin5 hojin 7
   Hojin7
12 11 10 45 46 49  2
47 20 19 35 37 14  3
44 34 24 29 22 16  6
 7 17 23 25 27 33 43
 8 18 28 21 26 32 42
 9 36 31 15 13 30 41
48 39 40  5  4  1 38

NB. タテの和
   +/ Hojin7
175 175 175 175 175 175 175
NB. ヨコの和
   +/"(1) Hojin7
175 175 175 175 175 175 175
NB. ナナメの和
   (<"(1) (i.7),.(i.7)) { Hojin7
12 20 24 25 26 30 38
   +/ (<"(1) (i.7),.(i.7)) { Hojin7
175
```

５．九方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

同様にして、9方陣はすでに得た7方陣の値を利用して、求められる。

```
   Hojin9 =: Hojin7 hojin 9
   Hojin9
16 15 14 13 75 76 77 81  2
79 28 27 26 61 62 65 18  3
78 63 36 35 51 53 30 19  4
74 60 50 40 45 38 32 22  8
 9 23 33 39 41 43 49 59 73
10 24 34 44 37 42 48 58 72
11 25 52 47 31 29 46 57 71
12 64 55 56 21 20 17 54 70
80 67 68 69  7  6  5  1 66

NB. タテの和
   +/Hojin9
369 369 369 369 369 369 369 369 369
NB. ヨコの和
   +/"(1) Hojin9
369 369 369 369 369 369 369 369 369
NB. ナナメの和
   (<"(1) (i.9),.(i.9)) { Hojin9
16 28 36 40 41 42 46 54 66
   +/ (<"(1) (i.9),.(i.9)) { Hojin9
369
```

５．十一方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

11 方陣はすでに得た 9 方陣の値を利用して、求められる。

```
   Hojin11 =: Hojin9 hojin 11
   Hojin11
 20  19  18  17  16 113 114 115 116 121   2
119  36  35  34  33  95  96  97 101  22   3
118  99  48  47  46  81  82  85  38  23   4
117  98  83  56  55  71  73  50  39  24   5
112  94  80  70  60  65  58  52  42  28  10
 11  29  43  53  59  61  63  69  79  93 111
 12  30  44  54  64  57  62  68  78  92 110
 13  31  45  72  67  51  49  66  77  91 109
 14  32  84  75  76  41  40  37  74  90 108
 15 100  87  88  89  27  26  25  21  86 107
120 103 104 105 106   9   8   7   6   1 102
```

NB. タテの和

```
   +/ Hojin11
671 671 671 671 671 671 671 671 671 671 671
```

NB. ヨコの和

```
   +/"(1) Hojin11
671 671 671 671 671 671 671 671 671 671 671
```

NB. ナナメの和

```
   +/ (<"(1) (i.11),.(i.11)) { Hojin11
671
```

６．十三方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

13 方陣はすでに得た 11 方陣の値を利用して、求められる。

```
   Hojin13 =: Hojin11 hojin 13
   Hojin13
 24  23  22  21  20  19 159 160 161 162 163 169   2
167  44  43  42  41  40 137 138 139 140 145  26   3
166 143  60  59  58  57 119 120 121 125  46  27   4
165 142 123  72  71  70 105 106 109  62  47  28   5
164 141 122 107  80  79  95  97  74  63  48  29   6
158 136 118 104  94  84  89  82  76  66  52  34  12
 13  35  53  67  77  83  85  87  93 103 117 135 157
 14  36  54  68  78  88  81  86  92 102 116 134 156
 15  37  55  69  96  91  75  73  90 101 115 133 155
 16  38  56 108  99 100  65  64  61  98 114 132 154
 17  39 124 111 112 113  51  50  49  45 110 131 153
 18 144 127 128 129 130  33  32  31  30  25 126 152
168 147 148 149 150 151  11  10   9   8   7   1 146
```

NB. タテの和

```
   +/ Hojin13
1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105
```

NB. ヨコの和

```
   +/"(1) Hojin13
1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105
```

NB. ナナメの和

```
   +/ (<"(1) (i.13),.(i.13)) { Hojin13
1105
```

７．おわりに

関孝和の方法により、十三方陣まで作ってみた。

Ｊのプログラムはこの後、付録として付記した。

それほど、凝ったものではない。Ｊのプログラムというより、ループなども用いた BASIC 流のプログラムである。Ｊのループ構文 for_J. (i.N) --- end. を活用したが、その使用法も記した。

関孝和の各種方陣　Jプログラムリスト

```
NB. SekiHojin.ijs Revised
NB.   by Toshio Nishikawa 2021/5/23
NB. Seki-Kowa's Magic Square
NB. 関 孝和　方陣
NB.   桐山光弘、歳森宏「江戸の数学」日刊工業新聞社 (2006). p.141-154
wr =: 1!:2&2

NB. for_loop of 0 to y. ====
test0 =: 3 : 0
N =. y.
for_J. (i. N) do.
    wr (":J), ' ', (J#'A')
end.
'** end **'
)

NB. 三方陣 ----------------------------------------------------------
Hojin3 =: 3 3$4 9 2 3 5 7 8 1 6
NB. 五方陣 ----------------------------------------------------------
Hojin5 =: 5 5$ 8  7 23 25  2 22 12 17 10  4  5 11 13 15 21  6 16  9 14 20 24
19  3  1 18

NB. ステップ（い）操作 ===================================
f0 =: 3 : 0
f0 =: 3 : 0
m =. y.
n =. (m-1)%2
nn =. _2 + 2 * m
inn =. >: i. nn
m_yoko =. |. (-n) {. inn
m_yoko =. m_yoko , (|. (- <: n) {. (_1+2*n){. inn)
m_yoko =. m_yoko, 1, 2
m_tate =. 2 }. n {. inn
m_tate =. m_tate , (<: <: m) }. (+/ (n), (<: m)) {. inn
mxy0 =. ((<: <: m), (<:m))$0
```

```
mxyt =. ( ((<: <: m), (<:m))$0) ,"(1, 0) m_tate
mxy =. m_yoko , ( ((<: <: m), (<:m))$0) ,"(1, 0) m_tate
mma =. (<0, 0){mxy
mmb =. (>: *: m) - mma
mmc =. ((<: m)#0), mmb
mmm =: mxy , mmc
)

NB. ステップ（ろ）操作==============================
f1 =: 3 : 0
N =. y.
MM =. f0 N
NN2 =. >: *: N
MM =. (NN2 - (<0, (N-1)) { MM) (<(<:N), 0) } MM
for_J. (>: i.(N-2)) do.
    MM =. (NN2 - (<J, (N-1)) { MM) (<J, 0) } MM
end.
for_J. (>: i.(N-2)) do.
    MM =. (NN2 - (<0, (J)) { MM) (<(N-1), J) } MM
end.
)


NB. ステップ（は）操作  ==============================
f2 =: 3 : 0
N =. y.
N1 =. (N-1)%2
NN =. N1 + i.N1
M2 =. f1 N

NB. 上下交換
for_J. (NN) do.
  MM =. (<0, J){M2
  M2 =. ((<(N-1), J){M2) (<0, J) } M2
  M2 =. (MM) (<(N-1), J) } M2
end.
```

```
NB. 左右交換
for_J. (NN) do.
  MM =. (<J, 0){M2
  M2 =. ((<J, (N-1)){M2) (<J, 0) } M2
  M2 =: (MM) (<J, (N-1)) } M2          NB. output as global value
end.
)


NB. ステップ（に）操作 ========================
NB. 修正三方陣の作成
NB. 内部の空白の値を埋めるため、三方陣を利用する
NB. 五方陣では、タテ、ヨコ、ナナメの各和は 65 でなくてはならない
NB.   (+/ 1, 2, 3, ... 25) % 5
NB.   (+/ >: i. *:5) % 5 => 65
NB. 五方陣の外側は、すでに求められている
NB.
NB.    8|      |2    ナナメの和を65にするには             8|         |2
NB.   --+---------       26 + (1 +(4 5 6)) = 37         --+---------+--
NB.     |4 9 2|          26 + (2 +(4 5 6)) = 40           |12       |
NB.     |3 5 7|            - - - -                       |    13   |
NB.     |8 1 6|          26 + (8 +(4 5 6)) = 65           |       14|
NB.   --+-----+---     とすればよい                      --+---------+--
NB.   24|      |18                                       24|         |18
NB. すなわち、三方陣の各値を8(=12-4)だけ、かさ上げする
NB.   65 - 26 => 39
NB.   +/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 => 45
NB.   45 % 3 => 15
NB.   39 - 15 => 24
NB.   24 % 3 => 8
NB.  三方陣 M3 の各値を8 ずつ増やす
NB.
f23 =: 3 : 0
M23 =: 8 + Hojin3
)
```

```
f3 =: 3 : 0 NB. revised
:
H =. x.
N =. y.
N1 =. N-2
HH =.  +/ 0{H
A0 =. f0 N
A1 =. f1 N
A =. f2 N
AA =. ((<0, 0){A) + ((<(<:N), (<:N)){A)
B =. +/ >: i. *: N
BB =. B % N
X =. BB - (AA + HH)
XX =. X % N1
HX =: XX + H
NB. global value for next routine
)

NB. ステップ（ほ）操作 ========================
NB. 内部を修正三方陣で埋める
NB.    MH f4 5
NB.  8  7 24 24  2
NB. 22 12 17 10  4
NB.  5 11 13 15 21
NB.  6 16  9 14 20
NB. 24 24  3  1 18


f4 =: 3 : 0  NB. revised
:
HX =. x.
HXX =. HX f3 y.
NB. 配列の周囲を0で囲み、タテ、ヨコ 2 ずつ増やす。
NB. 配列の大きさに関係なく、可能。
( (0,"(1) 0, HXX, 0 ) ,"(1 0) 0 ) + (f2 y.)
)
```

```
NB. 方陣作成プログラム ========================================
NB. Usage:
NB.    五方陣 Hojin3 hojin 5
NB.           Hojin5 =: Hojin3 hojin 5
NB.    七方陣 Hojin5 hojin 7
hojin =: 3 : 0
:
HH =. x.
N =. y.
M =. f0 N
M =. f1 N
M =. f2 N
M =. HH f3 N
M =. HH f4 N
)



   load'g:¥j402¥user¥sekihojin.ijs'
   f0 7
12 11 10 5 4 1  2
 0  0  0 0 0 0  3
 0  0  0 0 0 0  6
 0  0  0 0 0 0  7
 0  0  0 0 0 0  8
 0  0  0 0 0 0  9
 0  0  0 0 0 0 38
   f1 7
12 11 10  5  4  1  2
47  0  0  0  0  0  3
44  0  0  0  0  0  6
43  0  0  0  0  0  7
42  0  0  0  0  0  8
41  0  0  0  0  0  9
48 39 40 45 46 49 38
   f2 7
```

```
12 11 10 45 46 49  2
47  0  0  0  0  0  3
44  0  0  0  0  0  6
 7  0  0  0  0  0 43
 8  0  0  0  0  0 42
 9  0  0  0  0  0 41
48 39 40  5  4  1 38
   Hojin5 f3 7
20 19 35 37 14
34 24 29 22 16
17 23 25 27 33
18 28 21 26 32
36 31 15 13 30
   Hojin5 f4 7
12 11 10 45 46 49  2
47 20 19 35 37 14  3
44 34 24 29 22 16  6
 7 17 23 25 27 33 43
 8 18 28 21 26 32 42
 9 36 31 15 13 30 41
48 39 40  5  4  1 38
```