

Jで関孝和の方陣をプログラムする 五方陣、七方陣、九方陣、… 西川 利男

江戸、寛永年間に活躍した和算の大家、関孝和は同時代のニュートンに比肩する日本人数学者の誇りである。

関孝和は算木に代わる筆算の点竄（てんさん）術の創始から円理などあらゆる数学分野で有名である。

その関孝和が非常にユニークな方法で魔方陣を作っている。たまたま見つけた下記の書[1]に解説されていた。それをもとに五方陣、七方陣、九方陣、… とJでプログラミングしてみた。魔方陣などと言わず単に方陣と呼んで、さめた見方に好感を感じる。

[1] 桐山光弘、歳森宏「江戸の日本人は数学好きだった」日刊工業新聞社(2006)。

0. 魔方陣とは

魔方陣とはタテ・ヨコ・ナナメの和が等しい数字の並びをいう、その最も基本となる三方陣は、古代中国でも古代オリエントでも古くから知られていたようである。以下は古代中国の伝説に由来するものである。[2]

[2] イアン・スチュアート、水谷淳訳「魅惑と驚愕の数たち」SBクリエイティブ(2016)。

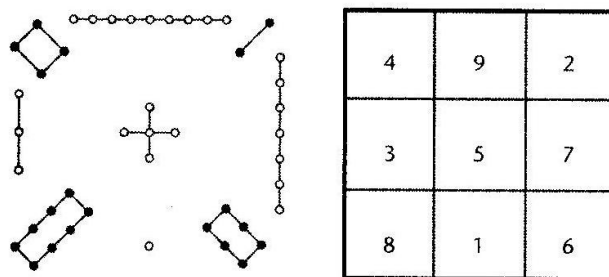


図 50 左：洛書。右：現代の表し方

1. 関孝和の方陣—作成の原理

一般的に奇数の方陣、例えば5方陣 $N=5$ に共通する作成の原理はつぎのようにまとめられる。

- (1) ステップ(い)操作…方陣の上段、右段に1から $(N^2)/2$ までの数をセットする。
- (2) ステップ(ろ)操作…方陣の下段、左段に残りの (N^2) までの数をセットする。
- (3) ステップ(は)操作…方陣の周囲段の数を入れ替え調整する。
- (4) ステップ(に)操作…一段下 $N-1$ 、つまり3方陣の値は知られているとする。
これを N 方陣(5方陣)の内部にはめ込むように値を調整する。
- (5) ステップ(ほ)操作…周囲だけが出来ている N 方陣(5方陣)の内部に
上の調整 $N-1$ 方陣(3方陣)を埋め込む。これにより完成。

2. 十三方陣の周囲段部分の作成—Jのプログラム実行を通して

アルゴリズムが良くわかるようにあえて大きい $N=13$ で示してみる。

- (1) ステップ(い)操作

f0 13

24	23	22	21	20	19	11	10	9	8	7	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	146

上段と右段に1から24までの数を図のように入れる。半分ずつ入れる。

なお、Jのプログラムは最後に示した。

(2) ステップ(ろ)操作

十三方陣では、1 から 169(=13²)の数を使う。したがって、上段と向かいあう下段の数との和は170(=1+169)になるよう入れる。すでに示したが、右下の値も、斜めの和170になるようできる。

f1 13

24	23	22	21	20	19	11	10	9	8	7	1	2
167	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
165	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
164	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
158	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
157	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13
156	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14
155	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
154	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
153	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17
152	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18
168	147	148	149	150	151	159	160	161	162	163	169	146

(3) ステップ(は)操作

上段と下段の数、右段と左段の数の和を合わせるため数の入れ替えをおこなう。

f2 13

24	23	22	21	20	19	159	160	161	162	163	169	2
167	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
165	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
164	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
158	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	157
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	156
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	155
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	154
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	153
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	152
168	147	148	149	150	151	11	10	9	8	7	1	146

3. 五方陣の作成—Jのプログラム実行を通して

方陣の周囲の値の作成方法がわかった上で、あらためて五方陣を作成する。

(1) ステップ(い)操作

```
f0 5
8 7 3 1 2
0 0 0 0 4
0 0 0 0 5
0 0 0 0 6
0 0 0 0 18
```

(2) ステップ(ろ)操作

```
f1 5
8 7 3 1 2
22 0 0 0 4
21 0 0 0 5
20 0 0 0 6
24 19 23 25 18
```

(3) ステップ(は)操作

```
f2 5
8 7 23 25 2
22 0 0 0 4
5 0 0 0 21
6 0 0 0 20
24 19 3 1 18
```

(4) ステップ(は)操作

ここで、三方陣についてはすでに知られているものとする。

Hojin3 =: 3 3\$4 9 2 3 5 7 8 1 6

Hojin3

4 9 2

3 5 7

8 1 6

NB. 修正三方陣の作成

NB. 内部の空白の値を埋めるため、三方陣を利用する

NB. 五方陣では、タテ、ヨコ、ナナメの各和は 65 でなくてはならない

NB. (+/ 1, 2, 3, ... 25) % 5

NB. (+/ >: i. *:5) % 5 => 65

NB. 五方陣の外側は、すでに求められている

NB.

NB.	8	2	ナナメの和を65にするには	8	2
NB.	---+-----		26 + (1 +(4 5 6)) = 37	---+-----+--	
NB.	4 9 2		26 + (2 +(4 5 6)) = 40	12	
NB.	3 5 7		- - - -	13	
NB.	8 1 6		26 + (8 +(4 5 6)) = 65		14
NB.	---+-----+---		とすればよい	---+-----+---	
NB.	24	18		24	18

NB. すなわち、三方陣の各値を8(=12-4)だけ、かさ上げする

NB. 65 - 26 => 39

NB. +/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 => 45

NB. 45 % 3 => 15

NB. 39 - 15 => 24

NB. 24 % 3 => 8

NB. 三方陣 M3 の各値を8 ずつ増やす

左引数として既知の値、三方陣Hojin3をとり、動詞f3により調整三方陣を得る。

Hojin3 f3 5

12 17 10

11 13 15

16 9 14

(5) ステップ(ほ)操作

すでにステップ(は)操作で五方陣の周囲段だけは出来ている。

この五方陣の内部に、直前のステップ(は)操作によって得た修正三方陣を埋め込む。

```
Hojin3 f4 5
 8 7 23 25 2
22 12 17 10 4
 5 11 13 15 21
 6 16 9 14 20
24 19 3 1 18
```

これで、五方陣が完成した。

なお、以上の各操作を一度でまとめておこなう、つまりある次数の方陣を計算する動詞 hojin を以下のように作った。

NB. 方陣作成プログラム =====

NB. Usage:

NB. 五方陣 Hojin3 hojin 5

NB. Hojin5 =: Hojin3 hojin 5

NB. 七方陣 Hojin5 hojin 7

hojin =: 3 : 0

:

HH =. x.

N =. y.

M =. f0 N

M =. f1 N

M =. f2 N

M =. HH f3 N

M =. HH f4 N

)

出来上がった5方陣をHojin5として保存する。

```
Hojin5 =: Hojin3 hojin 5
 8 7 23 25 2
22 12 17 10 4
 5 11 13 15 21
 6 16 9 14 20
24 19 3 1 18
```

4. 五方陣のタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

NB. タテの和

+ / Hojin5

65 65 65 65 65

NB. ヨコの和

+ / (1) Hojin5

65 65 65 65 65

NB. ナナメの和

((<0, 0), (<1, 1), (<2, 2), (<3, 3), (<4, 4)) { Hojin5

8 12 13 14 18

+ / ((<0, 0), (<1, 1), (<2, 2), (<3, 3), (<4, 4)) { Hojin5

65

5. 七方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

7方陣はすでに得た5方陣の値を利用して、求められる。

Hojin7 =: Hojin5 hojin 7

Hojin7

```
12 11 10 45 46 49 2
47 20 19 35 37 14 3
44 34 24 29 22 16 6
 7 17 23 25 27 33 43
 8 18 28 21 26 32 42
 9 36 31 15 13 30 41
48 39 40 5 4 1 38
```

NB. タテの和

+ / Hojin7

175 175 175 175 175 175 175

NB. ヨコの和

+ / (1) Hojin7

175 175 175 175 175 175 175

NB. ナナメの和

(<< (1) (i. 7), . (i. 7)) { Hojin7

12 20 24 25 26 30 38

+ / (<< (1) (i. 7), . (i. 7)) { Hojin7

175

5. 九方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

同様にして、9方陣はすでに得た7方陣の値を利用して、求められる。

Hojin9 =: Hojin7 hojin 9

Hojin9

```
16 15 14 13 75 76 77 81 2
79 28 27 26 61 62 65 18 3
78 63 36 35 51 53 30 19 4
74 60 50 40 45 38 32 22 8
9 23 33 39 41 43 49 59 73
10 24 34 44 37 42 48 58 72
11 25 52 47 31 29 46 57 71
12 64 55 56 21 20 17 54 70
80 67 68 69 7 6 5 1 66
```

NB. タテの和

+/Hojin9

369 369 369 369 369 369 369 369 369

NB. ヨコの和

+/"(1) Hojin9

369 369 369 369 369 369 369 369 369

NB. ナナメの和

(<"(1) (i.9),. (i.9)) { Hojin9

16 28 36 40 41 42 46 54 66

+/ (<"(1) (i.9),. (i.9)) { Hojin9

369

5. 十一方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

11 方陣はすでに得た 9 方陣の値を利用して、求められる。

Hojin11 =: Hojin9 hojin 11

Hojin11

20	19	18	17	16	113	114	115	116	121	2
119	36	35	34	33	95	96	97	101	22	3
118	99	48	47	46	81	82	85	38	23	4
117	98	83	56	55	71	73	50	39	24	5
112	94	80	70	60	65	58	52	42	28	10
11	29	43	53	59	61	63	69	79	93	111
12	30	44	54	64	57	62	68	78	92	110
13	31	45	72	67	51	49	66	77	91	109
14	32	84	75	76	41	40	37	74	90	108
15	100	87	88	89	27	26	25	21	86	107
120	103	104	105	106	9	8	7	6	1	102

NB. タテの和

+ / Hojin11

671 671 671 671 671 671 671 671 671 671 671

NB. ヨコの和

+ / (1) Hojin11

671 671 671 671 671 671 671 671 671 671 671

NB. ナナメの和

+ / (<"(1) (i. 11), . (i. 11)) { Hojin11

671

6. 十三方陣の作成とタテ、ヨコ、ナナメ和のチェック

13 方陣はすでに得た 11 方陣の値を利用して、求められる。

```
Hojin13 =: Hojin11 hojin 13
```

```
Hojin13
```

```
24 23 22 21 20 19 159 160 161 162 163 169 2
167 44 43 42 41 40 137 138 139 140 145 26 3
166 143 60 59 58 57 119 120 121 125 46 27 4
165 142 123 72 71 70 105 106 109 62 47 28 5
164 141 122 107 80 79 95 97 74 63 48 29 6
158 136 118 104 94 84 89 82 76 66 52 34 12
13 35 53 67 77 83 85 87 93 103 117 135 157
14 36 54 68 78 88 81 86 92 102 116 134 156
15 37 55 69 96 91 75 73 90 101 115 133 155
16 38 56 108 99 100 65 64 61 98 114 132 154
17 39 124 111 112 113 51 50 49 45 110 131 153
18 144 127 128 129 130 33 32 31 30 25 126 152
168 147 148 149 150 151 11 10 9 8 7 1 146
```

NB. タテの和

```
+/ Hojin13
```

```
1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105
```

NB. ヨコの和

```
+/"(1) Hojin13
```

```
1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105 1105
```

NB. ナナメの和

```
+/ (<"(1) (i.13),. (i.13)) { Hojin13
```

```
1105
```

7. おわりに

関孝和の方法により、十三方陣まで作ってみた。

J のプログラムはこの後、付録として付記した。

それほど、凝ったものではない。J のプログラムというより、ループなども用いた BASIC 流のプログラムである。J のループ構文 `for_J. (i.N) --- end.` を活用したが、その使用法も記した。

関孝和の各種方陣 Jプログラムリスト

NB. SekiHojin.ijs Revised

NB. by Toshio Nishikawa 2021/5/23

NB. Seki-Kowa's Magic Square

NB. 関 孝和 方陣

NB. 桐山光弘、歳森宏「江戸の数学」日刊工業新聞社 (2006). p.141-154

wr =: 1!:2&2

NB. for_loop of 0 to y. =====

test0 =: 3 : 0

N =. y.

for_J. (i. N) do.

 wr (":J), ' ', (J#'A')

end.

'** end **'

)

NB. 三方陣 -----

Hojin3 =: 3 3\$4 9 2 3 5 7 8 1 6

NB. 五方陣 -----

Hojin5 =: 5 5\$ 8 7 23 25 2 22 12 17 10 4 5 11 13 15 21 6 16 9 14 20 24

19 3 1 18

NB. ステップ (い) 操作 =====

f0 =: 3 : 0

f0 =: 3 : 0

m =. y.

n =. (m-1)%2

nn =. _2 + 2 * m

inn =. >: i. nn

m_yoko =. |. (-n) {. inn

m_yoko =. m_yoko , (|. (-<: n) {. (_1+2*n){. inn)

m_yoko =. m_yoko, 1, 2

m_tate =. 2 }. n {. inn

m_tate =. m_tate , (<: <: m) }. (+/ (n), (<: m)) {. inn

mxy0 =. ((<: <: m), (<:m))\$0

```

mxyt =. ( ((<: <: m), (<:m))$0) , "(1, 0) m_tate
mxy =. m_yoko , ( ((<: <: m), (<:m))$0) , "(1, 0) m_tate
mma =. (<0, 0) {mxy
mmb =. (>: *: m) - mma
mmc =. ((<: m)#0), mmb
mmm =: mxy , mmc
)

```

NB. ステップ (ろ) 操作=====

```

f1 =: 3 : 0
N =. y.
MM =. f0 N
NN2 =. >: *: N
MM =. (NN2 - (<0, (N-1)) { MM) (<(<:N), 0) } MM
for_J. (>: i. (N-2)) do.
    MM =. (NN2 - (<J, (N-1)) { MM) (<J, 0) } MM
end.
for_J. (>: i. (N-2)) do.
    MM =. (NN2 - (<0, (J)) { MM) (<(N-1), J) } MM
end.
)

```

NB. ステップ (は) 操作 =====

```

f2 =: 3 : 0
N =. y.
N1 =. (N-1)%2
NN =. N1 + i.N1
M2 =. f1 N

```

NB. 上下交換

```

for_J. (NN) do.
    MM =. (<0, J) {M2
    M2 =. ((<(N-1), J) {M2) (<0, J) } M2
    M2 =. (MM) (<(N-1), J) } M2
end.

```

```

NB. 左右交換
for_J. (NN) do.
  MM =. (<J, 0) {M2
  M2 =. ((<J, (N-1)) {M2) (<J, 0) } M2
  M2 =: (MM) (<J, (N-1)) } M2          NB. output as global value
end.
)

```

NB. ステップ (に) 操作 =====

NB. 修正三方陣の作成

NB. 内部の空白の値を埋めるため、三方陣を利用する

NB. 五方陣では、タテ、ヨコ、ナナメの各和は 65 でなくてはならない

NB. (+/ 1, 2, 3, ... 25) % 5

NB. (+/ >: i. *:5) % 5 => 65

NB. 五方陣の外側は、すでに求められている

NB.

NB.	8	2	ナナメの和を65にするには	8	2
NB.	---+-----		26 + (1 +(4 5 6)) = 37	---+-----+--	
NB.	4 9 2		26 + (2 +(4 5 6)) = 40	12	
NB.	3 5 7		- - - -	13	
NB.	8 1 6		26 + (8 +(4 5 6)) = 65	14	
NB.	---+-----+---		とすればよい	---+-----+---	
NB.	24	18		24	18

NB. すなわち、三方陣の各値を8(=12-4)だけ、かさ上げする

NB. 65 - 26 => 39

NB. +/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 => 45

NB. 45 % 3 => 15

NB. 39 - 15 => 24

NB. 24 % 3 => 8

NB. 三方陣 M3 の各値を8 ずつ増やす

NB.

f23 =: 3 : 0

M23 =: 8 + Hojin3

)

```

f3 =: 3 : 0 NB. revised
:
H =. x.
N =. y.
N1 =. N-2
HH =. +/ 0{H
A0 =. f0 N
A1 =. f1 N
A =. f2 N
AA =. ((<0, 0){A) + ((<<N), (<N)){A)
B =. +/ >: i. *: N
BB =. B % N
X =. BB - (AA + HH)
XX =. X % N1
HX =: XX + H
NB. global value for next routine
)

```

```

NB. ステップ (ほ) 操作 =====
NB. 内部を修正三方陣で埋める
NB.  MH f4 5
NB.  8 7 24 24 2
NB. 22 12 17 10 4
NB.  5 11 13 15 21
NB.  6 16  9 14 20
NB. 24 24  3  1 18

```

```

f4 =: 3 : 0 NB. revised
:
HX =. x.
HXX =. HX f3 y.
NB. 配列の周囲を0で囲み、タテ、ヨコ 2 ずつ増やす。
NB. 配列の大きさに関係なく、可能。
( (0, "(1) 0, HXX, 0 ) , "(1 0) 0 ) + (f2 y.)
)

```

NB. 方陣作成プログラム =====

NB. Usage:

NB. 五方陣 Hojin3 hojin 5

NB. Hojin5 =: Hojin3 hojin 5

NB. 七方陣 Hojin5 hojin 7

hojin =: 3 : 0

:

HH =. x.

N =. y.

M =. f0 N

M =. f1 N

M =. f2 N

M =. HH f3 N

M =. HH f4 N

)

load'g:¥j402¥user¥sekihojin.ijs'

f0 7

12 11 10 5 4 1 2

0 0 0 0 0 0 3

0 0 0 0 0 0 6

0 0 0 0 0 0 7

0 0 0 0 0 0 8

0 0 0 0 0 0 9

0 0 0 0 0 0 38

f1 7

12 11 10 5 4 1 2

47 0 0 0 0 0 3

44 0 0 0 0 0 6

43 0 0 0 0 0 7

42 0 0 0 0 0 8

41 0 0 0 0 0 9

48 39 40 45 46 49 38

f2 7

12 11 10 45 46 49 2
47 0 0 0 0 0 3
44 0 0 0 0 0 6
7 0 0 0 0 0 43
8 0 0 0 0 0 42
9 0 0 0 0 0 41
48 39 40 5 4 1 38

Hojin5 f3 7

20 19 35 37 14
34 24 29 22 16
17 23 25 27 33
18 28 21 26 32
36 31 15 13 30

Hojin5 f4 7

12 11 10 45 46 49 2
47 20 19 35 37 14 3
44 34 24 29 22 16 6
7 17 23 25 27 33 43
8 18 28 21 26 32 42
9 36 31 15 13 30 41
48 39 40 5 4 1 38