# 感染症予測モデル-SIR モデル

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2020 年 10 月 21 日

## 目次



## 1　はじめに

感染症の数理モデルはダニエル・ベルヌイに始まると言われる。画期的な SIR モデルは 1927 年に生化学者ケルマック（1898-1970）と軍医・疫学者のマッケンドリック（1976-1943）によって作成された。

本稿は日経ソフトウエア 2020/11 の「python による感染者シュミレーションー古典的なモデルで感染者の増減を予測」に依っている。著者は桜井進氏で解説は丁寧である。

## 2　SIR モデル

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \beta: & \text{接触あたりの感染率} \\ \gamma: & \text{回復率（隔離率）} \\ \text{総人口：} & N = S + I + R \end{array}$$

$$\begin{cases} \beta = mp/N: & \text{一人が接触する人数の平均} = m: \quad \text{これによる感染率} = p \\ \gamma: & \text{回復率} \end{cases}$$

## 3 ロレンツモデル

ご存知のロレンツモデル

$$\begin{cases} X' = & -\sigma X & +\sigma Y & \\ Y' = & XZ & +\gamma X & -Y \\ Z' = & XY & -bZ & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma: & \text{ブランドル数}: & 10 \\ \gamma: & \text{レイリー数}: & \dfrac{3}{8} \\ b: & \text{系の物理サイズ}: & 28 \end{cases}$$

ロレンツモデルの数値化。ルンゲ・クッター法を用いない簡易型。

```
NB. ====================================
NB. Lorenz Function & its 3-D Display
NB.   original by Kiyoshi Yamashita
NB.   revised by Toshio Nishikawa

dt =: 0.005
s =: 10
r =: 50
b =: 8 % 3

init =: 5 8 10

lorenz=: 3 : 0
'x0 y0 z0'=. y
X =. x0 + dt*s*(y0-x0)
Y =. y0 + dt*((r*x0) - (y0+x0*z0))
Z =. z0 + dt*((x0*y0) - b*z0)
X, Y, Z
)
```

## 4　SIR モデルの数値化

SIR モデルはインド・ボンベイでの 1905-1906 年のペストの大流行にほぼ合致したと言われる。

ロレンツモデルを例に微分方程式の数値化を行う。sir はルンゲ・クッター法を用いない山下/西川の方法による。

**S**usceptible: 未感染者: **I**nfected:感染者: **R**recoverd:死亡あるいは回復:

m: 一人が毎日接触する人数
p: その接触で感染する確率
$\beta : \beta = np/N$
感染者の回復平均人数（死者を含む）$d = 1/\gamma$

$$\gamma = 1/d \begin{cases} m := & 5,(10),50,100 & \text{感染率}: & () = default \\ T := & 100,(250),700: & \text{日数} & \\ h = & 0.1 & (T/n) & \text{交差/キザミ} \\ N = & 1000\text{万} & \text{人口}: & \\ N = & S+I+R: & & \end{cases}$$

```
h=: 0.1
beta=: 10*(0.02%10000000)  NB. beta=:mp/N=10*0.02/100000000
gamma=:1r14  NB. 回復率: 14 デフォルト
NB. ------syokiti----------------
NB. S0=: N-I0+R0=: 10000000-10
NB. I0=: 10
NB. R0=: 0
NB. ----------------------------------
NB. m=: 10  : 一日の接触人数
NB. p=: 0.02 : 一日の感染率
NB. d =: 14  : 感染者の平均回復人数
NB. gamma= 1/d = 1/14


sir=: 3 : 0
NB. Usage: sir (10000000 - 100),100,1
```

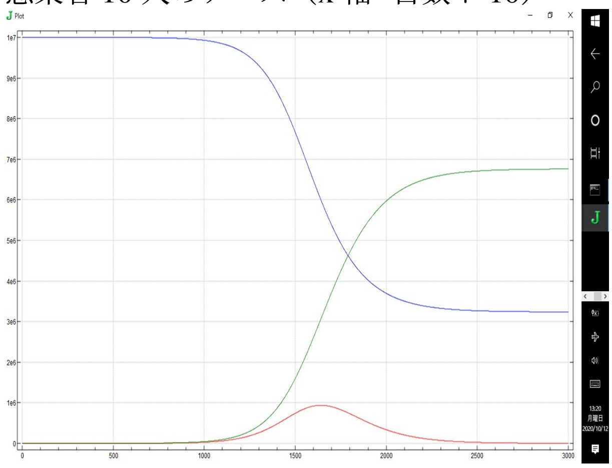
```
'S0 I0 R0'=. y
SS=. S0 + h * - beta  *(S0 * I0)
II=. I0 + h * beta *(S0*I0) - gamma * I0
RR=. R0 + h * gamma * I0
if. RR > S0 do. RR=. S0 end.  NB. stopper
SS,II,RR
)

plot_sir=: 3 : 0
pd 'reset'
pd {. "1 y  NB. blue is SS
pd {: "1 y  NB. red is RR
pd 1{ "1 y  NB.  is II
pd 'show'
)
```

人口は 1000 万人とした。

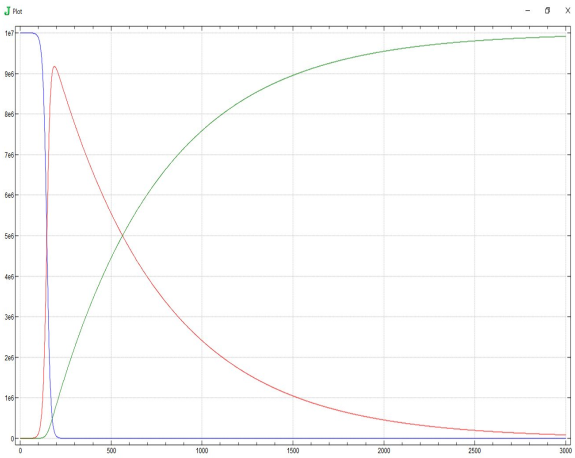
第 1 式は $\frac{dS}{dt} = -\beta SI$, 第 3 式は $\frac{dR}{dt} = \gamma I$。

第 2 式は時間微分 $0 = dS/dt + dI/dt + dR/dt$ として, 第 1 式と第 3 式を代入して導かれる。

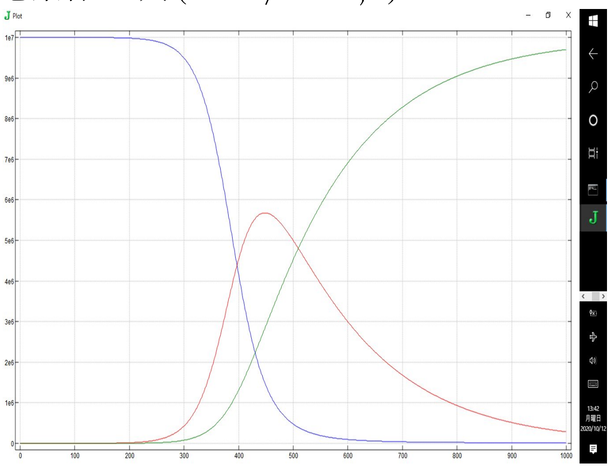
- $p = 0.02$
- 感染者 10 人のケース（x 軸=日数∗ 10）



- 感染者 50 人（$d = 1/60$）



- 感染者 20 人 ($d = 1/20 * 1, 2$)



パラメータ beta,gamma の取り方により感染状況は大きく変わる。特に感染率 p に影響される。

## 5　ルンゲ・クッター法

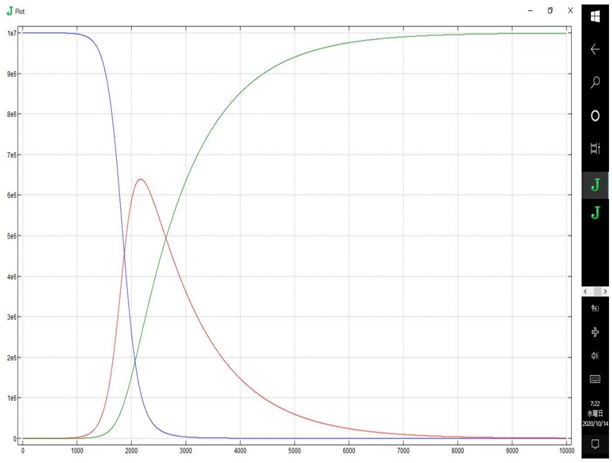
SIR0 でマトリクスを作成する。

```
SIR0=: 1 : 0
 'beta gamma'=. m
M0=: (0 0 0,(- beta)),(0,(-gamma ),0,beta),: (0,gamma,0 0)
M0&(+/ . *)@([,({. * 1&{))
)

SIR=: ((20*0.02%10000000) , 1%22) SIR0
```

C.Reiter のルンゲ・クッター法を片側型に直して用いた。刻みが 0.02 になっていることに注意

```
NB. Runge-Kutter by C.Reiter
NB. Slightly modified By M.Shimura
NB. usage:   lz RK ^:(i.10000) 0.1 0.2 0.3

RK=: 1 : 0
h2=: 0.01 NB. -: x
k1=: u y
k2=: u y +h2 * k1
k3=: u y +h2 * k2
k4=: u y + (+: 0.01) * k3
y+((+: 0.01)% 6)*k1 + k4 ++: k2+k3
)
```

```
   a=. SIR RK ^:(i.10000)(10000000-20),20, 0
   plot_sir a
```




## Referenses


桜井進「python による感染者シュミレーションー古典的なモデルで感染者の増減を予測」日経ソフトウエア　2020/11 号