パラメータ（媒介変数）を用いたグラフィックス（改定版）

SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.com

2019 年 7 月 15 日

目次

はじめに

円や多角形を描くのに極座標でオイラーの美しい公式を用いた C.Reiter の次のスクリプトを愛用してきた。

```
plot r. 2p1 * (i.360)%360
```

数学の教科書では媒介変数はそれ程深く取り上げられていないが、CG に範囲を広げパ

ラメータ（媒介変数）を探すと色々な図形を描くことができる。

かって横浜でのワークショップに早く出かけた折に伊勢佐木町で求めた古書を引っ張り出してきた。

郡山彬 · 原正雄 · 峯崎俊哉「CG のための線形代数」森北出版　2000

著者は東海大学の先生たちで CG の訳書もあり丁寧な説明がなされており、例題と図は Mathematics と Maple が用いられている良書である。

第 2 章が曲線の表示法に充てられており、Homogenious co-ordinate（斉次座標）にも触れられている。

1　関数の方程式

1.1　関数の四つの顔

1. 陽関数
2. 陰関数
3. 極座標
4. パラメータ表示

パラメータによるグラフィックスのコレクションには **Cartesian equation,Polar equation, parametrical equation** と表記されているが図毎に全ての式がそろっているわけではない。

- 方程式は常に陽関数表示できるとは限らない
- 陰関数表示された多価関数が陽関数で表示されるとき 2 つ以上の関数になる
- 陰関数表示された曲線はグラフで描くのが難しい

1.2　円の関数表示

1. 円の陰関数方程式

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

2. 円の極形式

$$z = r(cos\theta + isin\theta)$$

3. パラメーター表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} r \cdot cos\theta \\ r \cdot sin\theta \end{cases}$$

(1) は数式は奇麗でも格闘してもなかなか図にならない。数式マニアに委ねておこう

(2) はオイラーの美しい公式

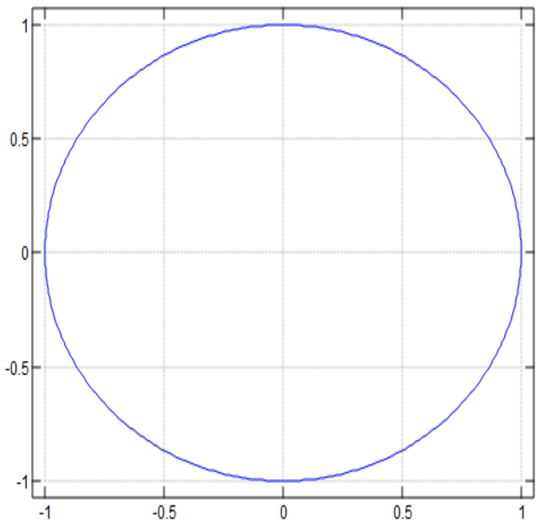
$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

の左辺で計算する。

J には $e^{i\theta}$ を計算する r.(Angle) が備わっている。

```
plot  r. 2p1 * (i.360)%360
```

360 角形を円としている



(3) は次のスクリプトで表現できる。ボックス内で x,y を各々計算しそのままグラフィックスに流し込む。

```
plot (cos ; sin) 2p1 * (i.360)%360
```

1.3　楕円のパラメータ表示

1. 楕円の陰関数方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

2. 楕円の極形式

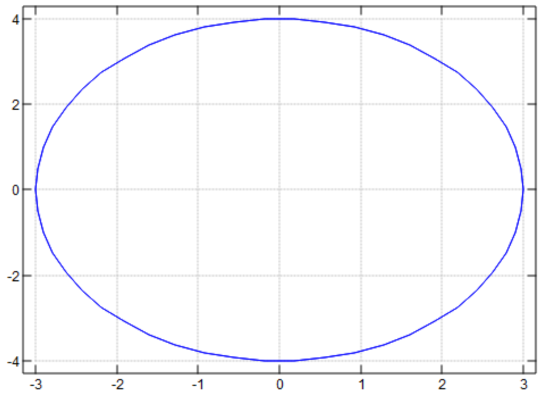
$$z = a \cdot cos\theta + b \cdot isin\theta$$

3. パラメーター表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} a \cdot cos\theta \\ b \cdot sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

```
plot ((3 *cos);4*sin) steps _2p1 2p1 100
```

$a = 3, b = 4$



2　関数のパラメータ表示

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$$

parameter=媒介変数を用いると、複雑な曲線をシンプルに表現できる場合がある。有名な数学関数もあればグラフィックス向きの関数もある。

次に詳細なパラメータを用いたグラフィックスの一大コレクションがある。

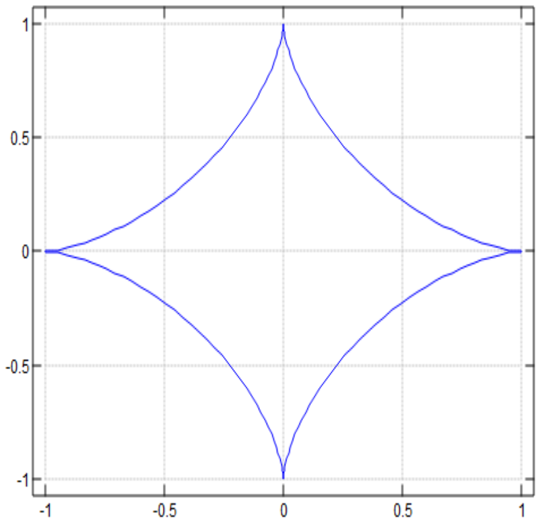
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html

2.1　パラメーター表示

1. アステロイド曲線

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} a \cdot cos^3\theta \\ a \cdot sin^3\theta \end{cases} \quad (a \geq 0)$$

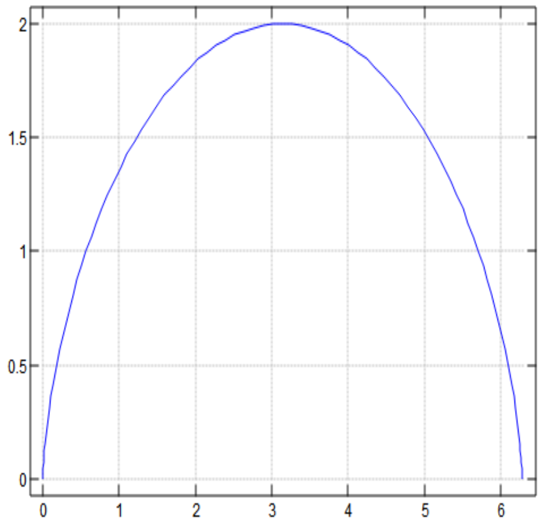



```
asteroid=: 3 : 0
pd 'reset'
t=.steps 0 2p1 200
a0=. ^&3 cos t
a1=. ^&3 sin t
pd a0;a1
pd 'show'
)
```

2. サイクロイド曲線
   サイクロイド曲線はヨハン・ベルヌイが提起した最急降下曲線でもある（1696）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} a(t - sin\theta) \\ a(1 - cos\theta) \end{cases}$$

$(\theta = 0 \rightarrow 2\pi)$



```
cycloid=: 3 : 0
pd 'reset'
t=. steps 0 2p1 100
a0=. t - sin t
a1=.  -. cos t
plot a0;a1
pd 'show'
)
```

3. レムニスケート曲線
   ガウスのレムニスケート曲線。1793 年のガウスの数学日記にレムニスケートが書かれている。レムニスケートとは花のリボンのこと
   遠目に見ていたガウスの難解曲線を描くことができた。
   - 直交座標

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

   - 極座標

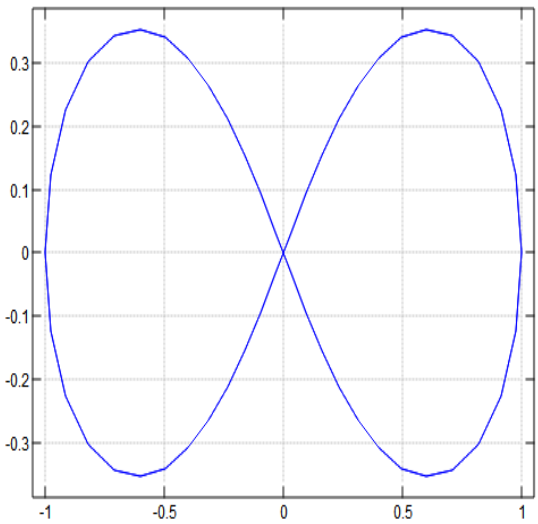
$$r^2 = a^2 cos(2\theta)$$

   - パラメータ表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{asin\theta cos\theta}{1 + sin^2\theta} = \dfrac{t(t^2+1)}{1+t^4} \\ \dfrac{acos\theta}{1 + sin^2\theta} = \dfrac{-t(t^2-1)}{1+t^4} \end{cases}$$

$(\theta = -2\pi \leftrightarrow 2\pi)$

```
lemniscate=: 3 : 0
pd 'reset'
t=. steps _2p1 2p1 100
t1=. >: ^&2 sin t
a0=. (cos t)  % t1
a1=.  ((sin t)*cos t) % t1
plot a0;a1
pd 'show'
)
```



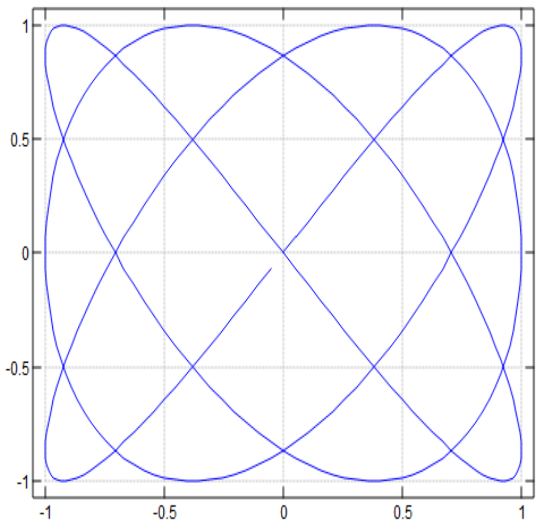
4. リサージュ

$$\begin{cases} x = & Asin(a\theta+\sigma) \\ y = & Bsin(b\theta) \end{cases}$$

- 振幅 A,B,
- 角周波数 a,b,
- 位相差 σ
- 図は A=B=1,a=3,b=4,$\sigma = 0$

```
t=. 2p1 * (i.360)%360
x=. sin 3 * t
y=. sin 4 * t
plot x;y
```

```
plot_2func _2p1 2p1 ; 'sin@*&3 ;sin@*&4'
```



3　極形式

極方程式 $f(r\theta) = 0$

旧式のレーダーのように円の中心から一本の線が 360 度回り、図形が描かれる

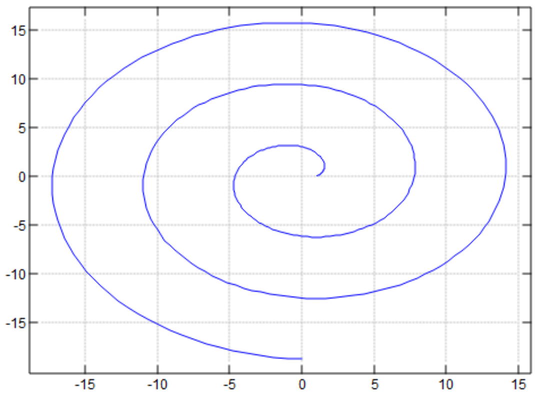
1. インボリュート
   - 極形式をダイレクトにスクリプトに落とす。r. の左引数を活用

```
 plot t r.t=. 6p1 * (i.360)%360
plot 3* t r. t=. 12p1 * (i.360)%360
```

   - パラメータ形式

$$\begin{cases} x = a(cos\theta + \theta sin\theta) \\ y = a(sin\theta - \theta cos\theta) \end{cases}$$

```
t=. 6p1 * (i.360)%360
x=. (cos t)  + t * sin t
y=. (sin t)  - t * cos t
plot x;y
```



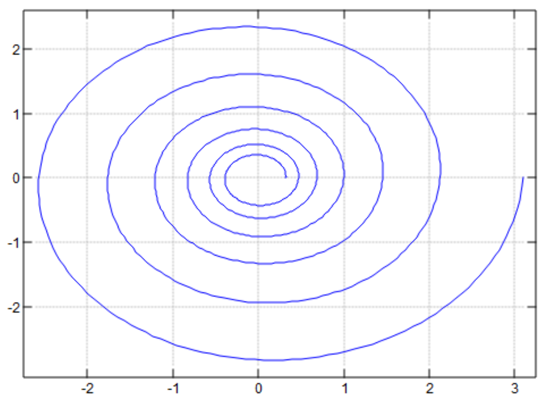
2. 対数螺旋
   - 極形式表示

$$r = ae^{b\theta}$$

```
plot (^0.06 * t) r.   t=.  steps _6p1 6p1 1000
```

   - r. はオイラーの美しい公式 $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ を $e^{i\theta}$ 側で計算する
   - r. は両項では左引数を取ることができる
   - パラメーター表示

$$\begin{cases} x = ae^{b\ \theta} cos\ \ \theta \\ y = ae^{b\ \theta} sin\ \ \theta \end{cases}$$



3. カージオイド

（a）数式

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

（b）極形式

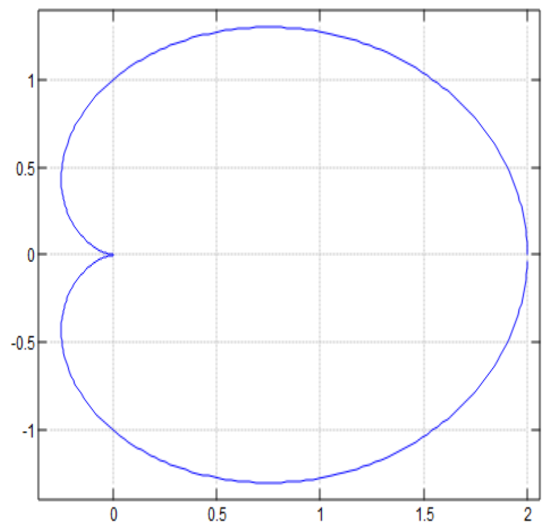
$$r = 2a(1 + cos\theta)$$

（c）パラメータ表示

$$\begin{cases} x = & a(1 + cos\theta)cos\theta \\ y = & a(1 + cos\theta)sin\theta \end{cases}$$

（d）plot

```
plot_2func _1p1 1p1 ;'(>:@cos * cos);>:@cos * sin'
plot (>: cos t)*L:0 (cos;sin)  t=. 2p1 * (i.360)%360
```



付録 A

1. サイクロイドの微分

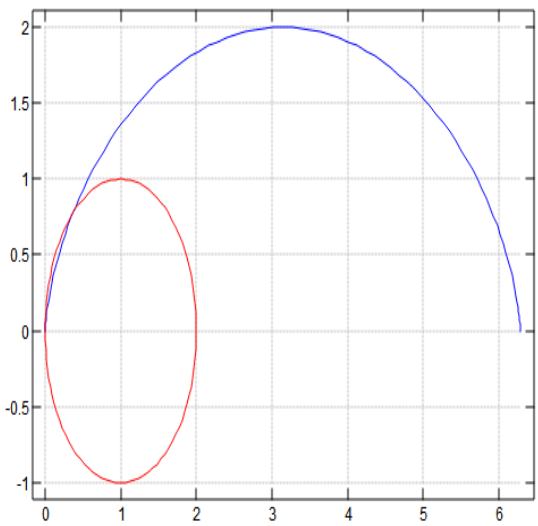
   微分法は次を参照した。

   http://www.geisya.or.jp/˜mwm48961/kou2/d_para1.html

   媒介変数は個別に微分できる

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{sint}{1-cost}$$

   分子分母を yx として描いてみた。




```
cycloid_diff=: 3 : 0
pd 'reset'
t=. steps 0 2p1 100
a0=. t - sin t
a1=.  -. cos t
pd a0;a1
NB. diff
pd 'color red'
d1=. sin t
pd a1;d1
pd 'show'
)
```

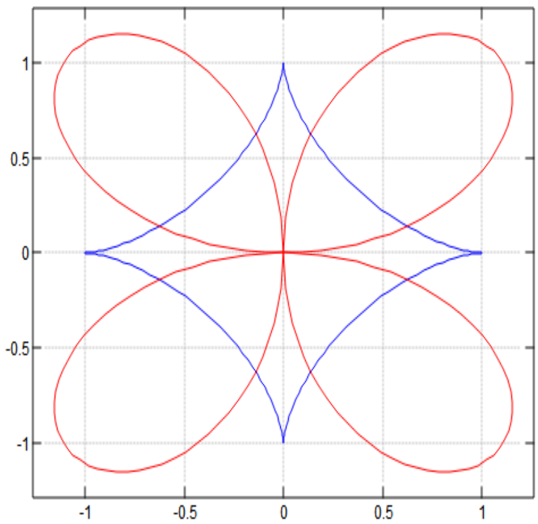
2. アステロイドの微分

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} acos^3 t \\ asin^3 t \end{array} \right.$$

   $(\theta = -2\pi \leftrightarrow 2\pi)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a \cdot cos^2 t(-sint)}{3a \cdot sin^2 t \cdot cost} = -tant$$

分子分母を yx として描いてみた。tan のグラフは暴れるので $\frac{dy}{dx}$ を分かち書きしてみた。




```
cycloid_diff=: 3 : 0
pd 'reset'
t=. steps 0 2p1 100
a0=. t - sin t
a1=.  -. cos t
pd a0;a1
NB. diff
pd 'color red'
d1=. sin t
pd a1;d1
pd 'show'
)
```

付録 B　References

郡山彬・原正雄・峯崎俊哉「CG のための線形代数」森北出版　2000

西沢清子・関口晃司・吉野邦生「フラクタルと数の世界」海文堂　1991