JAPLA研究会資料　2019/9/14

Ｊによる反転幾何グラフィックス
－コンピュータ実験幾何学によるアプローチ－

西川　利男

先月のJAPLA例会では、「インドラの真珠」の中にあるきれいなパターン図形を半ば強引にＪグラフィックスで描いてみた[1]。

しかし、その基となる反転幾何学を理解しないままでは、サイエンスの人間として恥ずかしいかぎりである。

あらためてコクセタの幾何学[2]および志村氏より提供された反転幾何学の論文[3]を読み直して、基礎から少しずつやってみることにした。

現在では、かつての定規、コンパスに代わるＪグラフィックスという強力なツールがあり、実験で作図する幾何学として、かつ大いに楽しむことができた。

[1] D.マンフォード、C.シリーズ、D.ライト、小森洋平訳
「インドラの真珠」日本評論社(2013).
Chapter 6, インドラの首飾り、p.149-185
Chapter 7　輝くパッキング p.187-212
[2] コクセタ「幾何学入門」上、第６章「円と球」p.155-187
[3] Kenji Kozai, Shlomo Liebeskind, “Circle Inversions and Applications　to Euclidean Geometry”.

１．反転幾何学とコンピュータ実験幾何学

いま、点Ｏを中心とする半径ｒの円Ｏがある。ここで点Ｏ以外に任意の点Ｐをとって、次の関係

$$\overline{OP} \times \overline{OQ} = r^2$$

を満たすような点Ｑは点Ｐの反転と呼ばれる。

図形操作に鏡映というがあり、これは直線に対する像である。一方、「直線は半径無限大の円である。」と考えることが出来る。したがって、反転幾何学とは直線に対する鏡映を円に対して拡張したものと見ることが出来る。

点Ｐが複数の集合であるときは図形が描かれる。そのとき反転の点Ｑの集合はどんな図形となるだろうか。このようなテーマを扱うのが反転幾何学ということになる。

従来、幾何学では、このような問題を解くことは軌跡(Locus)と呼んでいるが、古典的幾何学だけでは、なかなか困難である。

解析幾何学では、点や図形を座標の上の数値として表すことで、数値計算の問題として扱うことができる。さらに現代のコンピュータ・グラフィックスの力をかりて、コンピュータ実験幾何学と呼んだら良いと私は考えている。

２．任意の点Ｐから反転した点Ｑを求める[2]

(1)　まず、点Ｐが図のようにＸ軸上にあるとする。点Ｐからｙ方向に直線を引いて円Ｏと交わった点をＲとする。そこで、接線を引きｘ軸と交わった点をＱとすると、点Ｑは点Ｐの反転の点となる。

$$\Delta OPR \infty \Delta ORQ$$

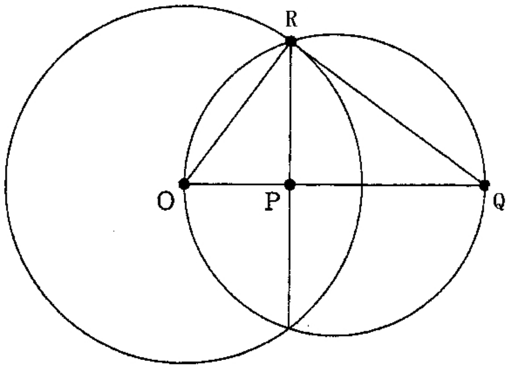
のように相似三角形となるので

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OR}{OQ} \quad \text{から} \; OR^2 = OP \times OR$$

すなわち、

点Ｑは点Ｐの反転した点になる。

(2) 点Ｐが一般に与えられたときも、座標軸を回転して上の操作を行ってから、元に戻せば、反転した点Ｑを得ることができる。



３．Ｊによるグラフィックスの利点

反転幾何学を自分のものにするには、従来のように、証明して理解するのではなく、まず具体的な図形を自分の手と目を使って、その現象を実験して体得することから始める。

それには、これまでの紙と鉛筆に代わって、コンピュータを積極的に使ったコンピュータ幾何学がある。

つまり、コンピュータのキーボードによる数値の入力だけでなく、マウスを使ってディスプレー画面の上で、位置を指定して、計算処理の結果を、ディスプレー画面の上の図形として表示させる。このようなことが、Ｊグラフィックスの環境として実現されるのである。

Ｊのプログラムは引き続き、前回からのgl2を用いたウィンドウズ・グラフィックス環境で行った。

・数値を入力したり、表示するエディットボタン
・処理の実行ボタン

これに加えて、つぎのような画面上でマウスのボタン操作を設けた。

・グラフィック画面上でマウスの右クリックしたとき、その点の位置の座標値が得られる。物理的座標値はグローバル値sysdataにより返される。

```
invergraph_invgraph_mbldown=: 3 : 0
  d=. ″. sysdata
  x=. (0{d) * 1000 % (2{d)
  y=. (1{d) * 1000 % (3{d)
  x0 =:  (x - 500) % 100
  y0 =:  (y - 500) % 100
)
```

そして、上のようにして、座標値として得られる。

マウスの左クリックについても、同様な機能が備わっている。

これは、反転グラフィックスをマウスクリックで操作しつつ行うのに、必須のテクニックである。

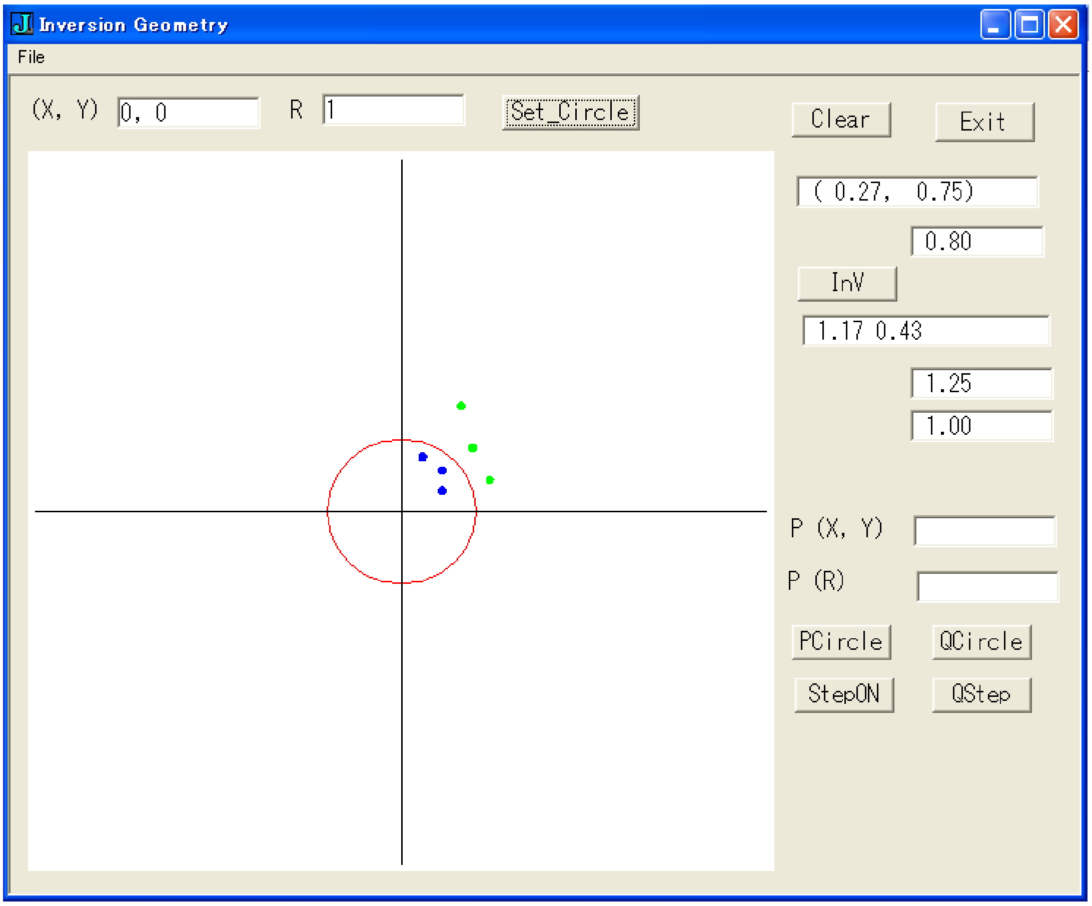
先に示した、点Ｐから点Ｑを求める反転の計算の基本プログラムは、以下のものである。

```
NB. revised 2019/10/17 ======================
invert0 =: 3 : 0
'sx sy' =. y.
sx =. sx - X0
sy =. sy - Y0
```

```
if. sx >: 0
  do.
    salph =. arctan(sy % sx)
  else.
    salph =. 1p1 - arctan((-sy) % sx)
end.
Len =. (*: R0) % (%: +/ *: sx, sy)
Tx =. Len * cos salph
Ty =. Len * sin salph
Tx, Ty
)
```

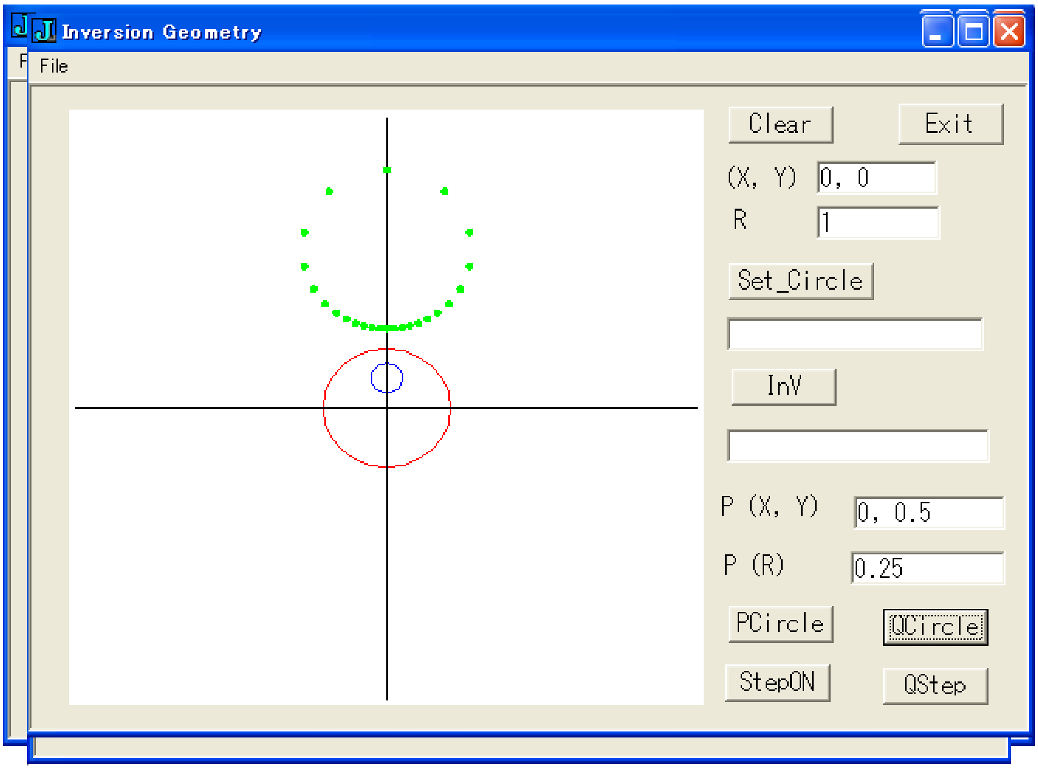
４．反転グラフィックスの実際
４．１　点Ｐから反転した点Ｑを得る

　まず、基準の円を中心と半径を指定して、これは赤で描かれる。
　つづいて、グラフィックス画面上でマウスの左ボタンを押すと、画面上で青の点で示され、座標値が窓に表示される。そのまま、右ボタンを押すと、画面上で緑の点で示され、反転した座標値が窓に表示される。

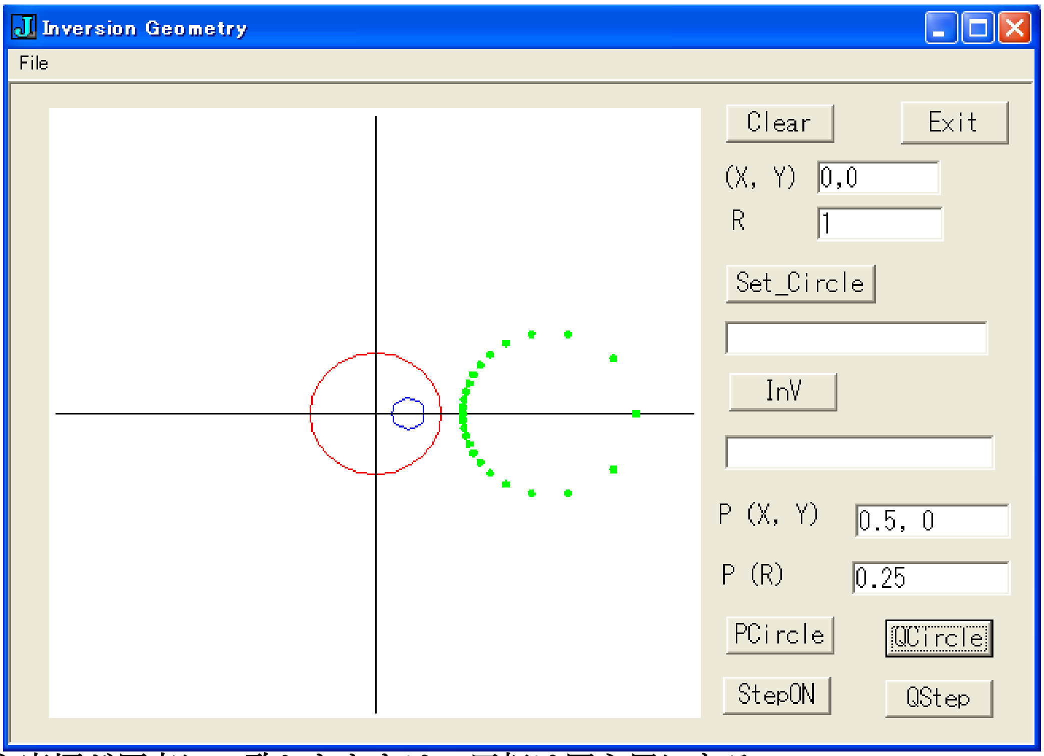


４．２　中心座標と半径を指定して円を描き、それに対する反転図形を得る

位置と大きさの異なるいろいろな円につき実行例をあげる。

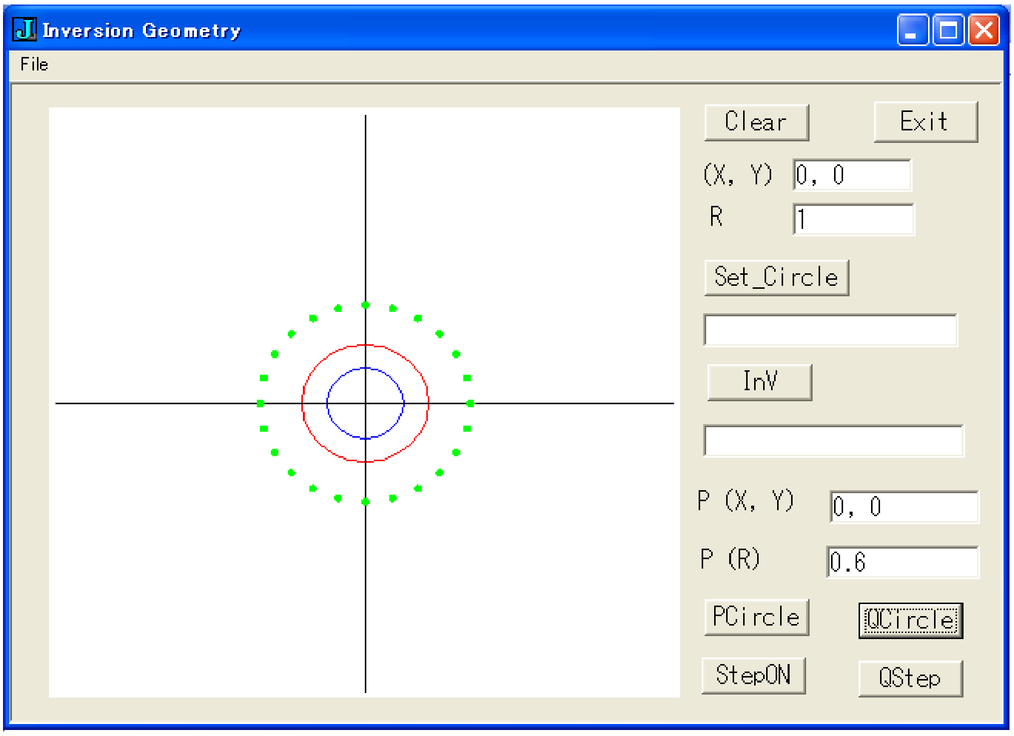


４．　３



中心座標が原点に一致したときは、反転は同心円になる

4．4反転図形の作成経過を1ステップごとに観察する



図形を一点ずつ、作成の手順を追って、それぞれに反転した点を表示する。反転の意味につき興味深い考察が得られるだろう。