

マルコフ連鎖とレスリー行列

SHIMURA Masato

2018年9月7日

目次

1	マルコフ連鎖	1
1.1	Jの文法	2
2	平均余命を求める	3
2.1	吸着型マルコフ過程	3
3	レスリー行列	5

1 マルコフ連鎖

未来の状態が過去の状態によらず現在の状態のみで決定される確率過程をマルコフ過程と言い、これが離散的な場合をマルコフ連鎖と言う。

1. マルコフの推移確率のわかりやすい事例

- 昨日以前の天気は翌日の天気に影響しない。
- 今日晴れ → 翌日晴れる確率は0.7, 曇の確率は0.3, 雨の確率は0
- 今日曇 → 翌日晴れる確率は0.4, 曇の確率は0.4, 雨の確率は0.2
- 今日雨 → 翌日晴れる確率は0.3, 曇の確率は0.3, 雨の確率は0.4

例題は「高校数学の美しい物語」より

2. 入力

$M_0 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$

3. 推移確率マトリクスの組上

M0			
晴	曇	雨	
0.7	0.3	0	NB. 晴れ
0.4	0.4	0.2	NB. 曇り
0.3	0.3	0.4	NB. 雨

```

M0 +/ . * M0      NB. P1
0.61 0.33 0.06
0.5 0.34 0.16
0.45 0.33 0.22

```

4. タシットのループで内積を連続計算

```

M0 +/ . * ^:(i.3) M0
晴れ 曇り 雨
0.7 0.3 0 NB. 明日の天気 P1
0.4 0.4 0.2
0.3 0.3 0.4

0.61 0.33 0.06 NB. 2日後の天候 P2
0.5 0.34 0.16
0.45 0.33 0.22

0.577 0.333 0.09 NB. 3日後の天気 P3
0.534 0.334 0.132
0.513 0.333 0.154

```

5. この推移マトリクスは何回か回すと吸着する。この値が晴れ、曇り、雨の定常分布となる

```

M0 +/ . * ^:(18) M0
0.555556 0.333333 0.111111
0.555556 0.333333 0.111111
0.555556 0.333333 0.111111

```

6. $(I - M0)^{-1}$ は行列式の値が 0 となり、逆行列は求められない

1.1 J の文法

- 内積 +/ . *
- タシットのループ
 - ^:(n) NB. 最終結果のみ表示
 - ^:(i.n) NB. 経過も表示

2 平均余命を求める

2.1 吸着型マルコフ過程

推移確率の何れかが 1 のときを吸着型マルコフ過程という。

小さなモデルで構造を確認する

最初に死亡率のみの推移確率を計算し、余命を求める

- ある動物の AGE と死亡率のモデル

Age 死亡率

0 0.1

1 0.05

2 0.2

3 1 (例題は下平による)

- 生存の推移確率のマトリクス

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

計算に使うのは Q の部分

L0 NB. = Q

0 0.9 0 0

0 0 0.95 0

0 0 0 0.8

0 0 0 0

- 内積のループ

L0 +/ . * ^:(i.3) L0

0 0.9 0 0 NB. 0 年目

0 0 0.95 0

0 0 0 0.8

0 0 0 0

0 0 0.855 0 NB. 1 年後

0 0 0 0.76

0 0 0 0

0 0 0 0

0 0 0 0.684 NB. 2年後 (吸着)

0 0 0 0

0 0 0 0

0 0 0 0

- 単位行列 I

$(= / \sim i.4$

1 0 0 0

0 1 0 0

0 0 1 0

0 0 0 1

- $(I - Q)^n$

$$(I - Q)^n = I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots + Q^n$$

フロベニウスの定理。産業連関表でのレオンチェフ逆行列と同じ手法である

$(= / \sim i.4) - L0$

1 _0.9 0 0

0 1 _0.95 0

0 0 1 _0.8

0 0 0 1

- $(I - Q)^{-1}$

この計算で求められる

%. $(= / \sim i.4) - L0$

1 0.9 0.855 0.684

0 1 0.95 0.76

0 0 1 0.8

0 0 0 1

- 横の合計=AGE別の余命となる

$(i.4), . + / "1 \quad \% . \quad (= / \sim i.4) - L0$

0 3.439 NB. 0年目の余命が平均寿命

```

1 2.71
2 1.8
3 1

```

3 レスリー行列

オックスフォードの動物学者レスリーが改良したモデル (1959)

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. EXAMPLE 羊のメスの出生率と生存率 (実データ) Bradie P273

```

L1
Age 出生率 生存率
      a      b
0 1 0 1
1 1 0.045 0.845
2 1 0.391 0.824
3 1 0.472 0.795
4 1 0.484 0.755
5 1 0.546 0.699
6 1 0.543 0.626
7 1 0.502 0.532
8 1 0.468 0.418
9 1 0.459 0.289
10 1 0.433 0.162
11 1 0.421 0

```

2. レスリー行列を組み上げる (手作業)

```

index=: ((<0 1)&|: i.11 11)
b=. 11 11 $ ( }:{:"1 L1) index } 121 $ 0
] LX=: ((2{"1 L1),b)
0 0.045 0.391 0.472 0.484 0.546 0.543 0.502 0.468 0.459 0.433 0.421
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0.845 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0.824 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

```

0    0    0 0.795    0    0    0    0    0    0    0
0    0    0    0 0.755    0    0    0    0    0    0
0    0    0    0    0 0.699    0    0    0    0    0
0    0    0    0    0    0 0.626    0    0    0    0
0    0    0    0    0    0    0 0.532    0    0    0
0    0    0    0    0    0    0    0 0.418    0    0
0    0    0    0    0    0    0    0    0 0.289    0    0
0    0    0    0    0    0    0    0    0    0 0.162    0

```

3. 固有値を計算する

addon の LAPACK をもちいた。次をロードする

```
addons/math/LAPACK
```

```
dgeev.ijs
```

```
lapack.ijs
```

```
a=. dgeev_jlapack_ LX
```

真ん中は固有値

```
>1{a
```

```

1.08999 0.395417j0.520533 0.395417j_0.520533 0.0932632j0.533933
0.0932632j_0.533933 _0.174379j0.59078 _0.174379j_0.59078 _0.486984
_0.380423j0.232537 _0.380423j_0.232537 _0.235381j0.322598 _0.235381j_0.322598

```

4. 最大固有値 1.08999 が羊の増加率となる

5. 最大固有値の固有ベクトル。年齢毎の羊の分布を表す

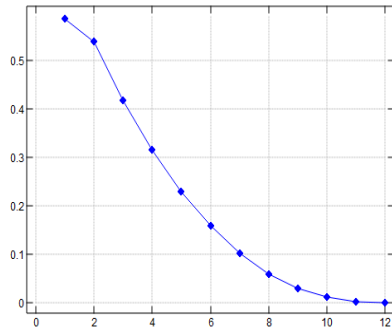
```
{."1 >2{a
```

```

0.586481 0.53806 0.417124 0.315333 0.229992 0.159308
0.102163 0.0586737 0.0286373 0.0109821 0.0029118 0.000432766

```

```
'marker line' plot (>:i.12); {."1 >2{a
```



6. パーセンテージに換算。 0-1 才が 23.9% 1-2 才が 21.9

({"1" >2{a}%2.4501

0.23937 0.219607 0.170248 0.128702 0.0938706 0.0650211

0.0416973 0.0239475 0.0116882 0.00448231 0.00118844 0.000176632

終わりに

レスリー行列に関しては 志村正人「レスリー行列と人口問題」JAPLA 2008 で発表している。今回は少しやさしく解説しようと考えたが、マルコフ連鎖をいろいろ触っている間に未消化の問題や新しい疑問が湧いてきて、主旨が徹底できなかった。マルコフ連鎖と計算プロセスの理解に応じて稿を改めたい

<http://japla.sakura.ne.jp>

References

Brain Bradie [A friendly Introduction to Numeric Analysis] Pearsn Education 2006

平下幸男 「数理科学のレッスン」産業図書 1992