確率論ノート (0)-二項分布を巡って

M.Shimura
JCD02773@nifty.ne.jp

2018 年 4 月 13 日

目次

1 二項分布への準備

1.1 ベルヌイ試行

ベルヌイ家は数学者や科学者を数多く排出した家系。数学や統計学の文献にはこの Bernouill Trail がベルヌイ家の誰に帰属するか説明したものは少ないが、WikiPedia の英語版で長男のヤコブ (1654-1705:スイス・バーゼル大学教授) と説明されていた。

ベルヌイ試行はデジタル時代に合っており、試行の結果が (0,1) で表されるものであるが、その比率は半分、半分とは限らないので応用範囲は広い。

- 出現確率を表 30% に細工したコイン
- 何回かの試行でサイコロの 1 の目が出る確率
-

1.2　組み合わせ

組み合わせ (Combination）は

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} =_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{cases} n: & 試行回数 \\ p: & 成功確率 \quad (0 \leq p \leq 1) \\ k: & 成功回数 \end{cases}$$

- J 言語で Combination はプリミティブ (！) である。
- $_k!_n$ となることに注意
- k を一度で済ませると

```
   (i.>:5)!5
1 5 10 10 5 1
```

数学の記法を拡大すると

```
   0 1 2 3 4 5 ! 5
1 5 10 10 5 1
```

$_nC_{k=0\to k}$

- 拡張するとパスカルの三角形が現れる

```
   0 1 2 3 4 5 !/ 0 1 2 3 4 5
1 1 1 1 1  1
0 1 2 3 4  5
0 0 1 3 6 10
0 0 0 1 4 10
0 0 0 0 1  5
0 0 0 0 0  1
```

$_{n=0\to n}C_{k=0\to k}$

2　2 項分布

二項分布は天下り的に次のように提示される

$$P[X-k] =_n C_k p^k (1-p)^{n^k}$$

次の Script は鈴木先生によるもので、分布を一度に計算でき、愛用している

```
NB. binoinal distribution
binom0=:4 : '(k!x )*(y ^ k)*(-. y )^|.k=: i. >: x '
NB. written by Giichiro Suzuki
```

-.　　$1-n$

>:　　$1+n$

3　二項分布の仕組み

■式の導出　$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^r b^{n-r}$

$q = 1 - p$ とすると

$(p+q)^n = \sum_{r=0}^{n} \; {}_nC_r p^r q^{n-r}$

$p + q = 1$ から

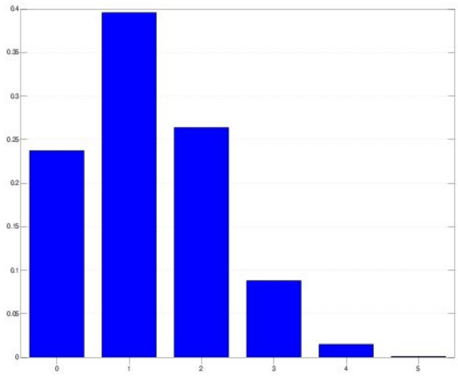
$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r p^r q^{n-r} = 1$

■Example:トランプの抽出　52 枚のトランプから 5 枚取り出したとき、X 枚がスペードになる確率

$$P(X) = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$$

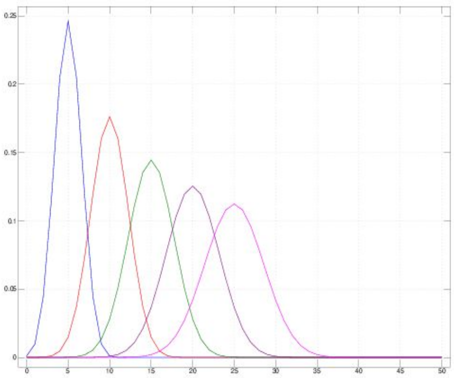
```
'type bar;xlabel 0 1 2 3 4 5'
plot ;}.("1)  5 binom 13r52
```

```
  5 binom 13r52
0    0.237305
1    0.395508
2    0.263672
3   0.0878906
4   0.0146484
5 0.000976563
```



■二項分布のグラフ　細工のない硬貨を 10，20，30，40，50 回投げた場合の表の出る確率の推移

```
plot  >{@>10 20 30 40 50) binom0 (L:0) 1r2
```



4　二項分布の期待値と分散

2 項分布の平均：$\mu = np$

2 項分布の分散:$\sigma^2 = np(1 - p)$

5　Worked　Example

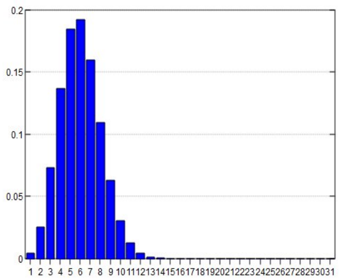
手許の統計学の教科書から二項分布の例題を取り出して *binom* で計算してみよう

1. コインを *3* 回投げたとき表の出る確率は何回か

```
   x:  3 binom 1r2
0 1r8
1 3r8
2 3r8
3 1r8
```

2. サイコロを *30* 回振ったときに *1* の目は何回出るか

```
 'bar' plot {|: 30 binom 1r6
```



3. 側溝の溢れる確率

都市計画道路の側溝が、設計上年間でオーバーフローする確率が *10%* とした場合に

（*a*）*5* 年間で *1* 回だけ超過する確率

```
   5 binom 0.1
0 0.59049
1 0.32805   NB. 1回  (0.59+0.32=0.91 1回以内で収まる)
2  0.0729
3  0.0081
4 0.00045
5     1e_5
```

（*b*）*5* 年間で *1* 回以内に収まる確率

```
    5 binom_cum 0.1
```

```
0 0.59049 0.59049
1 0.32805 0.91854
2  0.0729 0.99144
3  0.0081 0.99954
4 0.00045 0.99999
5    1e_5       1
```

(c) *5* 年目に初めてオーバーフローする確率

```
   (0.1^1)*0.9^4
0.06561
```

4. サイコロを *2* つ振った場合の丁半の確率

サイコロを *2* つ振った場合の出目

```
   (>:i.6)  (+/ ) table  >:i.6
+--+--------------+
|+/|1 2 3  4  5  6|
+--+--------------+
|1 |2 3 4  5  6  7|
|2 |3 4 5  6  7  8|
|3 |4 5 6  7  8  9|
|4 |5 6 7  8  9 10|
|5 |6 7 8  9 10 11|
|6 |7 8 9 10 11 12|
+--+--------------+
```

丁半は半分づつ

```
   3 12 $ /:~ ;  (>:i.6) (+/ )   >:i.6
2 3 3 4 4 4  5  5  5  5  6  6
6 6 6 7 7 7  7  7  7  8  8  8
8 8 9 9 9 9 10 10 10 11 11 12
```

5. ゲーム好きのフランス人の貴族レメ氏が「サイコロ *2* 個を *24* 回振って少なくとも一回 *6* のぞろ目が出れば勝ち」という賭けを行ってひどい目にあった。

```
0     0.508596
1     0.348752
2      0.11459
3    0.0240093
4   0.00360139
5 0.000411588
6   3.72389e_5
```

```
..........

  +/ }. 24x binom 1r36
 0.491404
```

概ね 51 : 49

6. *52* 枚の一組のトランプから *4* 枚取り出して、全て *A* になる確率

$$\frac{1}{\binom{52}{4}} = \frac{1}{270725}$$

```
   4!52x
270725
   1 % 4!52x
1r270725
```

7. *52* 枚の一組のトランプから *4* 枚取り出して、全てがスペードになる確率

$$\frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{11}{4165}$$

```
   1 x:  (4!13) % 4!52
11r4165
```

6　幾何分布

次に従う分布

$$p(x) = (1 - p)^{x-1} p$$

References

一色賢「道具としての統計解析」日本実業出版社　*2004*

鈴木義一郎「統計分析へのいざない」マーケティングサイエンス研究所　*1998*

和達三樹・十河清「キーポイント確率・統計」岩波書店　*1993*