サイエンスプロットで複素数を

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2018 年 9 月 5 日

目次

J の Plot はデカルト平面がとガウス平面がシームレスになっており、複素数のままでグラフに表示できる。更にサイエンスプロットという簡易書式が備わっており、関数の形を即座に見ることができ、代数と幾何がコラボしている。更に多項式の解も同時に表示できるようにしたので、複素関数の理解を深めることが出来る

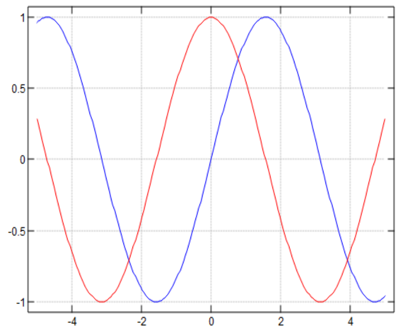
1 サイエンスプロット

J の plot には本格的なビジネスグラフを書く機能の他に関数を簡単に見られるサイエンスプロットの機能が備わっている。

幾つか描いてみよう

1. 最初にツールをロードする
   require 'plot numeric trig'
2. 書式：描く区間と関数を指定する

```
plot _5 5 ; 'sin,cos'
```

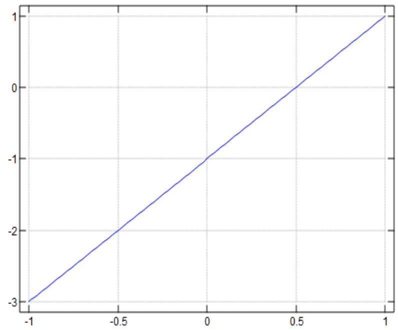


3. 回帰直線を描く

$$f = 2x - 1$$

```
f0=. _1 2&p.
plot _1 1 ; 'f0'
```

J の多項式定義では高次の項が右に来る。



4. 関数の解とグラフ

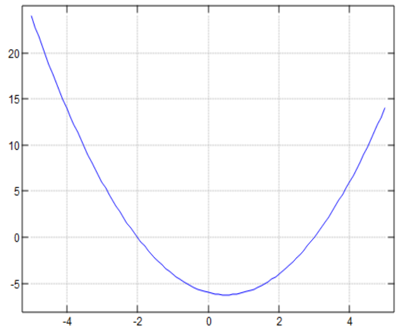
$$f = x^2 - 1x - 6$$

- 関数を描く

```
f1=: _6 _1  1&p.
plot _5 5;'f1'
```

- 関数の解

プリミティブ p. で多項式の解が得られる。最初のボックス内の 1 は反復回数で多いときは苦戦




```
  p. _6 _1 1
+-+-----+
|1|3 _2|
+-+-----+
```

2 ルネ・デカルト

ルネ・デカルト（1596 − 1650）は南フランスに生まれイエスズ会の学院で学んだ。数学ネットワークの中心にいたメルセンヌ神父は学院の先輩。

オランダの軍隊で技術将校として過ごした後、30 年戦争に従軍するためバイエルン公の軍に半年ほど入隊した。このとき哲学の啓示を得てイタリア、パリを放浪した後オランダで隠棲した。

1637 年「方法序説」

この頃より無神論の非難を受けほとんどの書物が出版禁止になる。

1649 年スエーデンの王女クリスティーナに仕え、朝寝坊の習慣を放棄して朝 5 時から講義をして風邪で亡くなる。

デカルトの数学の最大の業績は座標により代数と幾何を統合したことである

次の式は木村のデカルトの項で紹介されている。 J のサイエンスプロット

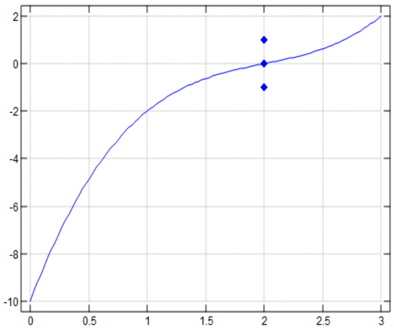
で描くと一瞬であるが、往時デカルトも誰かに描かせたかも知れない。
　Ｊの p. で解を求めると２と 2j1 2j_1 の複素数の共役である。

$$y = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$$

```
  p.  _10 13 _6 1
+-+-----------+
|1|2j1 2j_1 2|
+-+-----------+
```

　デカルト座標で描いてみる

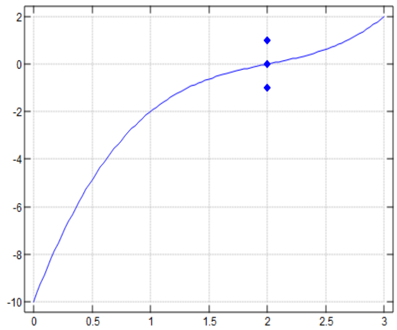
```
   f4=. _10 13 _6 1&p.
     plot 0 3 ; 'f4'
```



　上のグラフをガウス平面で書いてみよう。（アルガン，ヴェッセル平面とも言う）
　３次多項式の実数解が１つで２の複素数が実数を挟んで縦に並ぶが、この共役複素数の考え方はデカルトは朧気に持っていた。
　デカルトが呟いた「３次方程式には解が３個あるはずだが *imaginary* だ」の *imaginary* の用語は残った。また、根の数に関する「デカルトの規則」があるが、代数学の基本定理の証明は *100* 年後のことである。

　複素解と関数曲線を同時に描けるスクリプトを作成する

```
0 3 plot_complex _10 13 _6 1
```



```
plot_complex=: 4 : 0
NB.Usage:0 3 plot_cpmplex _10 13 _6 1
f0=. y&p.
dat0=: f0 tmp=.steps x ,100
dat1=: }.; p. y
pd 'reset'
pd 'type marker'
pd dat1
pd 'type line'
pd tmp;dat0
pd 'show'
)
```

2.1 ジラールの問題

木村に次のジラールの問題が紹介されている。

ジラール *(1595* フランス生まれ）はカルバン派だったため若い頃にオランダに亡命した数学者、築城家でリュート奏者。*sin cos tan* の記号を初めて使い、マイナスは数直線を反対方向に進めばよいと示した。

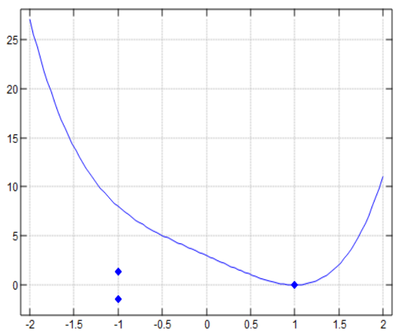
ジラールの例

$$x^4 - 4x + 3 = 0$$

2 次、*3* 次項が抜けている

```
   p. 3 _4 0 0 1
+-+---------------------------+
|1|_1j1.41421 _1j_1.41421 1 1|
+-+---------------------------+

_2 2  plot_complex 3 _4 0 0 1
```



1 は重根となり、複素数はグラフからは予測できない

3　ド・モアブルの円分数

1685 年ルイ *14* 世のナントの勅令廃止に伴い、人口の　5%　いたユグノーはオランダなどにに逃れた。ド・モアブル（*1667* − *1754*）は投獄され釈放後直ちにイングランドへ逃れたが、 ユグノーが溢れかえるなかで外国人では希望する数学研究者の職は得られず、数学教師として過ごした。ニュートンも「その方面はド・モアブルが詳しい」と一目置いていた。

- ド・モアブルの公式。これを使って複素数の三乗根の計算が出来る。

$$(cos\theta + \sqrt{-1}sin\theta)^n = cosn\theta + \sqrt{-1}sinn\theta$$

  ド・モアブルには複素数が見えていたようだ。

- スイスの会計士アルガンの発想。これは *1800* 年代でド・モアブルより *100* 年後

  単位 *1* の数直線を一本とる。この数直線を-*1* 倍するには *0* を中心に *180* 度回転する。 $\sqrt{-1}$ 倍するには？。 $\sqrt{-1}$ 倍を *2* 回行えば-*1* 即ち *180* 度回転するので、その半分 *90* 度を $\sqrt{-1}$ 倍と思えばよい。

- アルガンの方法により、正四角形が作図できる。
- 次の方法は正多角形の作図に愛用している *J* のイディオムである
  これは 2π の円周を n 分割した上で各点の $e^{i\theta}$ の値を求めている。

  1. 正四角形の辺の位置の計算

```
    clean  +. r. 2p1* (i.4)%4
 1  0
 0  1
_1  0
 0 _1
```

  2. ガウスの正 *17* 角形を描く

```
'line marker' plot {|: (+.r. 2p1* (i.17)%17),1 0
```

3. 複素極座標での計算 J の *r.* は次の計算をしている

$$z = re^{i\theta} = r(cos\theta + isin\theta)$$

- ド・モアブルに戻ろう

  $z^n = 1$ となるような複素数 z を複素平面上にプロットすると半径 *1* の円に内接する正 n 角形の頂点全体となる。

  ド・モアブルの公式により、複素平面上で $\frac{360}{2}$ ずつ順番に回転していった数は全て *1* の n 乗根になることを利用している

  1. 正 *4* 角形

```
   p. _1 0 0 0 1
+-+-------------+
|1|1 0j1 0j_1 _1|
+-+-------------+

   +. ;@}. p. _1 0 0 0 1
 1  0
 0  1
 0 _1
_1  0

plot {@|: 1 0,~+. r. 2p1 * (i.4)%4
```

  2. 正三角形

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

```
    clean   r. 2p1* (i.3)%3
1 _0.5j0.866025 _0.5j_0.866025

 p.  _1 0 0 1
```

```
+-+------------------------------+
|1|1 _0.5j0.866025 _0.5j_0.866025|
+-+------------------------------+
```

References

木村俊一　「天才数学者はこう解いた、こう生きた」講談社選書メチエ *2001*

コンウエイ/ガイ　根上訳「数の本」*Springer/Tokyo*　*2001*