JAPLA 研究会資料　2018/9/8

Ｊプログラムにより「誰でもできる偶数次の魔方陣」をつくってみよう

西川　利男

伊達宗行先生の本から、Ｊによる奇数次魔方陣について先月報告したが、まだ続きがある。偶数次の魔方陣についても、歴史をからめていろいろなお話がのっている。

１６世紀の画家デューラーに、有名な絵メレンコリアがあるが[1]、その中に、偶数次の魔方陣が描かれている。

[1] 伊達宗行「理科で歴史を読み直す」p. 216, ちくま新書(2010)

図５－６　メレンコリアⅠ（デューラー，1514年）

この絵の中、右上に描かれている4x4の魔方陣は次のものである。

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

この魔方陣の「にくい」ところは、最下位の行で、「15 14」と制作の年が入れられている。

また、この絵には、コンパスなど当時の最新のサイエンスが散りばめられ、魔方陣は最新のかっこいいテーマだったようだ。西欧では、偶数魔方陣の初めての登場だという。

ところが伊達先生によると、中国ではすでに500年も前から知られ、１３世紀に楊輝の算書により日本にも入ってきた。さらにインドでは６世紀にはすでに知られていたという。

１．偶数魔方陣４ｘ４を作る－デューラーの方法 ［1］，p.221-225

デューラー型の4x4魔方陣は次のようにして、作られる。

ここ　での操作のポイントは配列の
要素の　間の値の交換・スワップであ
る。
プログ　ラムを作れば簡単だが、この
操作を　プリミティブの命令で行って
くれる　言語はない。

Ｊに　は、このスワップ操作を行う
プリミ　ティブ動詞が備えられれてい
る。

swap =: C.

これ　は、通常の数値演算ではなく、
群論　の置換の動詞である。

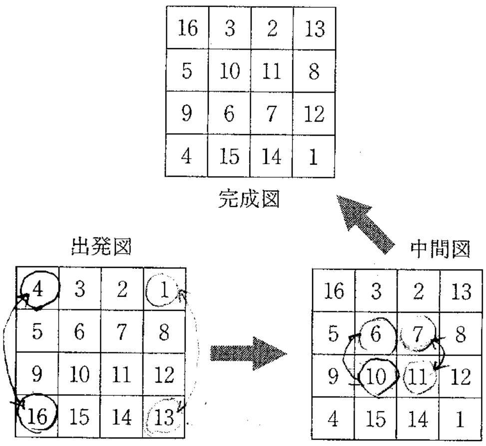

図５－８　デューラーの魔方陣の作り方

ここで、ひとことコメントしたい。コンピュータでの数学の処理には、数値演算だけでなく、このような数値の移動、交換など構造演算とも呼べるものまで含まれる。

　数学とはこのようなものと考えたIverson, Huiの哲学をわたくしは評価したい。
つまり、数学演算とは以下のようなものである。

・数値演算

　四則、加減乗除

　sin, cos, tan, log, exp ...

・構造演算

　配列から要素はもちろん、行の取り出し、列の取り出し、要素の修正など

　包含関係、置換、巡回置換、など

Ｊとはこのようなシステムであることを、Ｊユーザとして誇りに思う。

　さて、デユーラーの4x4魔方陣では

```
   4  3  2  1
   5  6  7  8
   9 10 11 12
  16 15 14 13
```

のように並べた、4x4の配列を元に、第０列、第３列では最初と最後の要素でスワップを行う。
第１列、第２列では１番目、２番目の要素間でスワップを行う。(ゼロオリジン)
この操作で４ x ４魔方陣が作られるが、この処理をＪでやってみよう。

　以下、Ｊのコーディングにより、示していこう。

```
NB. Even Order Magic Square
   load'g:¥j402¥user¥magic_square.ijs'
   names ''
I    M    MD0 N    P    Q    go   rd   run  tc   wr

NB. take column elements as a vector from array
tc =: {"(1)

NB. swap items using C. (permute primitive)
NB.  eg. (<0, 3) swap 10 11 12 13  => 13 11 12 10
swap =: C.

MD0  =: 4 4$4 3 2 1 5 6 7 8 9 10 11 12 16 15 14 13
```

```
   MD0
 4  3  2  1
 5  6  7  8
 9 10 11 12
16 15 14 13

   0 tc MD0
4 5 9 16
   1 tc MD0
3 6 10 15
   2 tc MD0
2 7 11 14
   3 tc MD0
1 8 12 13

NB. step-1 ===================================
   MD10 =: (<0, 3) swap 0 tc MD0
   MD10
16 5 9 4
   MD11 =: 1 tc MD0
   MD11
3 6 10 15
   MD12 =: 2 tc MD0
   MD13 =: (<0, 3) swap 3 tc MD0
   MD13
13 8 12 1
   MD12,.MD13
 2 13
 7  8
11 12
14  1
   MD11,. MD12 ,. MD13
 3  2 13
 6  7  8
10 11 12
15 14  1
```

```
   MD10 ,. MD11,. MD12 ,. MD13
16  3  2 13
 5  6  7  8
 9 10 11 12
 4 15 14  1
   MD1 =:  MD10 ,. MD11,. MD12 ,. MD13
   MD1 =:  MD10 ,. MD11,. MD12 ,. MD13
   MD1
16  3  2 13
 5  6  7  8
 9 10 11 12
 4 15 14  1

NB. step-2 ===================================
   MD20 =: 0 tc MD1
   MD20
16 5 9 4
   MD21 =: (<1, 2) swap 1 tc MD1
   MD21
3 10 6 15

   MD22 =: (<1, 2) swap 2 tc MD1
   MD22
2 11 7 14
   2 tc MD1
2 7 11 14
   MD23 =: 3 tc MD1
   MD23
13 8 12 1

   MD2 =: MD20 ,. MD21 ,. MD22 ,. MD23
```

NB. 改良法　2018/8/3
NB. 配列の行、列のインデックスを１０進表示から４進表示の連続べくトルに変えて、
NB. Ｊの１０進表示から４進表示への変換　4&#.
NB. swap を連続べくトル表示で用いる。

```
   MD0
 4  3  2  1
 5  6  7  8
 9 10 11 12
16 15 14 13

   MD1A =: 4 4 $(< (4&#. 0 0) , (4&#. 3 0)) swap , MD0
   MD1A
16  3  2  1
 5  6  7  8
 9 10 11 12
 4 15 14 13
   MD1B =: 4 4 $(< (4&#. 0 3) , (4&#. 3 3)) swap , MD1A
   MD1B
16  3  2 13
 5  6  7  8
 9 10 11 12
 4 15 14  1
   MD1C =: 4 4 $(< (4&#. 1 1) , (4&#. 2 1)) swap , MD1B
   MD1C
16  3  2 13
 5 10  7  8
 9  6 11 12
 4 15 14  1
   MD1D =: 4 4 $(< (4&#. 1 1) , (4&#. 2 1)) swap , MD1C
   MD1D
16  3  2 13
 5 10 11  8
 9  6  7 12
 4 15 14  1
```

```
NB. Result of even order magic square  =====================
   MD2
16  3  2 13
 5 10 11  8
 9  6  7 12
 4 15 14  1
   +/MD2
34 34 34 34
   +/"(1) MD2
34 34 34 34
NB. Sum Check of Diagonal items ===================
   (i.4) ,. (i.4)
0 0
1 1
2 2
3 3
   (<"(1) (i.4) ,. (i.4)) { MD2
16 10 7 1
   +/ (<"(1) (i.4) ,. (i.4)) { MD2
34
NB. Sum Check of Anti-Diagonal items ===================
   (|. i.4) ,. (i.4)
3 0
2 1
1 2
0 3
   (<"(1) (|. i.4) ,. (i.4) ) { MD2
4 6 11 13
   +/ (<"(1) (|. i.4) ,. (i.4) ) { MD2
34
```

２．偶数魔方陣６ x ６を作る－関孝和の方法 [1], p.228-230

続いて６ x ６魔方陣として、江戸時代の数学者関孝和による方法が紹介されている。先の４ x ４魔方陣 MD2 は１ から 16 までのものであったが、これの各数に 10 を加えれば　11 から 26 までの偶数魔方陣となる。これを下の図のかげの部分にはめ込む。

つぎに、1 から 10 と　27 から 36 の数字を使って、1 と 36　、2 と 35、のようにペアを作って、下の図のように、上下、左右、斜めにペアをはめ込み、かつ外枠の行、列の数和が 111 となるよう、ばらまく。いくつかの解があるが、それほどでなく、得られる。

このようにして、関孝和は、一般の単偶数魔方陣が統一的に作れることを示した。なお、六方魔方陣もインド、バビロニア、中国では古くから知られていたとのことである。

ここでも、
経過を見て

MD
16　3　2
5　10　11
9　6　7
4　15　14

1	9	32	33	34	2
30					7
29					8
10					27
6					31
35	28	5	4	3	36

図５－13　六方陣の作り方（関孝和）

Ｊのコーディングをそのまま記してその
いただく。

```
MD =: mag4 MD0
```

13
8
12
1

```
   9 32 33 34, (10 + MD)
 9 32 33 34
26 13 12 23
15 20 21 18
19 16 17 22
14 25 24 11
   9 32 33 34, (10 + MD), (28 5 4 3)
 9 32 33 34
26 13 12 23
15 20 21 18
19 16 17 22
14 25 24 11
28  5  4  3

   (1 30 29 10 6 35) ,. 9 32 33 34, (10 + MD), (28 5 4 3)
 1  9 32 33 34
```

```
30 26 13 12 23
29 15 20 21 18
10 19 16 17 22
 6 14 25 24 11
35 28  5  4  3

   MS =: ((1 30 29 10 6 35) ,. 9 32 33 34, (10 + MD), (28 5 4 3) ),. (2 7 8 27
31 36)
   MS
 1  9 32 33 34  2
30 26 13 12 23  7
29 15 20 21 18  8
10 19 16 17 22 27
 6 14 25 24 11 31
35 28  5  4  3 36
   +/MS
111 111 111 111 111 111
   +/"(1) MS
111 111 111 111 111 111
```

スマホ版のプログラムーJ_Android on Huawei

```
NB. magicsq_even
NB. run the program
NB.  start , go '', go ''

MD0 =: 4 4$4 3 2 1

start =: 3 : 0
MD =: MD0
)

gg =: 3 : 0
:
sw =. x
sww = 4&#. (L:0) sw
(4,4)$ (< (< sww)) C. , y
)

SW1 =: 0 0;3 0
SW2 =: 0 3;3 3
SW3 =: 1 1;2 1
SW4 =: 1 2;2 2

go =: 3 : 0
SI =: SI + 1
MD =: ( “. ‘SW’ , ( “: SI)) gg MD
)
```

NB. 伊達宗行「理科で歴史を読み直す」p. 229, ちくま新書(2010)
NB. 配列の４進法＝＞連続線形ヴェクトルのとして、swap(C.)を使う

```
   MD0
 4  3  2  1
 5  6  7  8
 9 10 11 12
16 15 14 13
NB. eg. MD =: mag4 MD0
mag4 =: 3 : 0
MD =. y.
MD =. 4 4 $ (< (4&#. 0 0) , (4&#. 3 0)) swap , MD
MD =. 4 4 $ (< (4&#. 0 3) , (4&#. 3 3)) swap , MD
MD =. 4 4 $ (< (4&#. 1 1) , (4&#. 2 1)) swap , MD
MD =. 4 4 $ (< (4&#. 1 2) , (4&#. 2 2)) swap , MD
)
```

NB. 4 x 4 をプログラム mag4 で作成する　========================

```
   MD =: mag4 MD0
   MD
16  3  2 13
 5 10 11  8
 9  6  7 12
 4 15 14  1

   MD6 =: (1, 30, 29, 10, 6, 35) ,. MD61 ,. (2, 7, 8, 27, 31, 36)
   MD6
 1  9 32 33 34  2
30 26 13 12 23  7
29 15 20 21 18  8
10 19 16 17 22 27
 6 14 25 24 11 31
35 28  5  4  3 36
   +/MD6
111 111 111 111 111 111
   +/"(1) MD6
111 111 111 111 111 111
```

```
   (<"(1) (i.6) ,. (i.6)) { MD6
1 26 20 17 11 36
   +/ (<"(1) (i.6) ,. (i.6)) { MD6
111

   (<"(1) (|. i.6) ,. (i.6)) { MD6
35 14 16 21 23 2
   +/ (<"(1) (|. i.6) ,. (i.6)) { MD6
111
```