

## Jによる群論の理解 同時にJは強力な群論計算のツールである

西川 利男

現代数学において、群論は欠かせない非常に大切な数学の分野である。しかし一般にはそれほど認識されていない。

最近、

金 重明「13歳の娘に語るガロアの数学」岩波書店(2011).  
という本が出ている。ガロアの数学は構造にありとしてその道具に群論をすえている。非常に意欲的で、著者の熱意が感ぜられる良い本である。

だがしかし、ガロワの名声ゆえか、読者への群論の導入、説明について数学者の目から離れられない、と私には感じられる。

ひるがえって、私のための群論との出会いは、筑波のころ輪講した次の本であった。

F. Albert Cotton, “Chemical Applications of Group Theory”  
当然、ガロアは出てこない。分子構造を理解するための群論だからである。

### 1. 群論をどうとらえるか。

群論が数学における考え方を豊かにする、非常に重要な大きな分野であることは確かだが、その説明のしかたについては、大いに問題がる、と私は思う。

まず、入り口、導入部において、用語の使い方によって、群論をいたずらに難しく、近寄りがたいものになっている。

群論をなぜ、やってみようと思うのか。教養のためなら必要ない。計算でビジネスをという向きにも、時間の無駄だ。

現在の私としては、「ルービックキューブの仕組みを、しかと理解したい」ということからの群論である。

また、その理解の方法と計算ツールとして、Jが極めて役に立ち、強力であることを、皆さんに知っていただきたい。以下述べてみよう。

## 2. 群論の群とは何か。Jでいう動詞である。

「群論の群と何か」について誤解があるようである。「群」という言葉の代わりに「操作」という言葉を使ったらよい。「群の要素を元という」などと言う代わりに、「操作の集合が群をなす」と言ったらよい。「群論でいう群」は、「J言語の動詞」に他ならない。つまり操作する関数の集まりである。数学で言えば、+、-などの演算子や sin, cos, log, exp など関数と同じ種類である。

なお、集合論は、事柄つまり名詞の集まりを扱う。「群論」と「集合論」とはべつのものである、はっきり区別しないとイケない。

## 3. 群論の群操作は、Jのプリミティブ動詞C.ですべて行われる。

以下に、实例をあげよう。

A =: 'abcde'      NB. データ、名詞

p =: 1 2 3 0 4      NB. パラメータ、名詞

### • 直接置換操作 `direct permute`

```
p { A
bcdae
```

```
p C. A      NB. 2項の動詞C. 左引数はパラメータ、右引数はデータ
bcdae
```

これは、次の操作に等しい。

```
p { A
bcdae
```

### • 直接とサイクルのパラメータの変更

```
q =: C. p      NB. 単項の動詞C.は直接とサイクルのパラメータのスイッチ
```

```
q      NB. このような機能を備える言語はJ以外にはない!
```

```
+-----++
```

```
|3 0 1 2|4|
```

```
+-----++
```

### • 巡回置換(サイクル)操作 `cycle permute`

```
q C. A      NB. サイクルでは、左引数はパラメータはボックスで指定
bcdae
```

### • 互換操作 `スワップ swap`

```
swap =: (_1, 0)&C.      NB. 動詞 swap として定義したほうが便利。
```

```
swap 'ab'
```

```
ba
```

```
swap 'ba'
```

ab

Jにより群論がいかにか効果に使われるか、の事例として、先に発表したJルービック・キューブのレポートを以下に再録した。

JAPLA 研究会資料 2016/12/10

RubikJ\_OpGL2016.doc

## ルービック・キューブの楽しみ方いろいろ —手で動かす楽しみと群論・J立体グラフィックス—

西川 利男

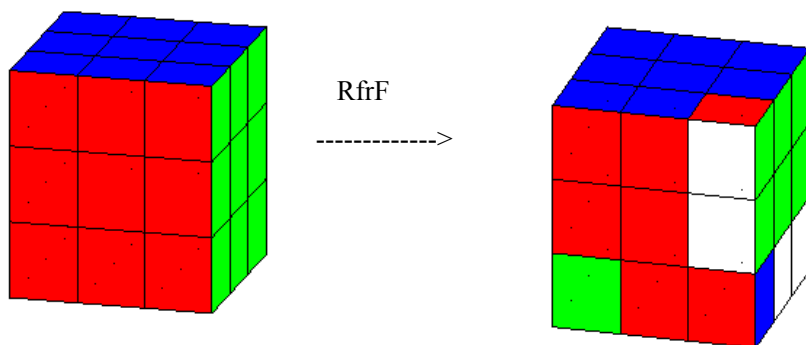
ルービック・キューブには、実際に手に持って動かして遊ぶ楽しみがあり、同時に群論の応用としての解析、さらにはJ-OpenGLによる立体グラフィックスのダイナミックなシミュレーションなど、いろいろな楽しみ方がある。

先日、志村正人氏から私宛にルービック・キューブのJプログラムの問い合わせが来たということで、すでに数年前、JAPLA 研究会で、数回にわたって発表した私のレポートをあらためて精査してみた。

今回は、まずルービック・キューブを動かす楽しみを第一の視点として易しく紹介し、群論による解析やJグラフィックスの詳細は、先のレポートを随時参照していただくようにした。

### 1. ルービック・キューブを動かしてみよう

ルービック・キューブは3x3x3の色分けされた小片（Cubeletなどと呼ぶ）から成る一種のサイコロで遊ぶパズル・ゲームである。面と回転操作の名前及び色わけの仕方にはいろいろとあるが、ここでは日本での解説書などで標準とされている方式（かつての国際標準）を用いた。たとえば、前(赤)F面の右下のコーナーキューブを右上に移動する操作の記述は以下のようにする。



Rubik Cube の面の名前 上(青)U, 前(赤)F, 右(緑)R, 左(黄)L, 後(橙)B, 下(白)D

Rubik Cube の操作 … 面に対応して名付けられている。

コーナキューブの回転 上面での反時計 u, 時計 U、前面での反時計 f, 時計 F

右面での反時計 r, 時計 R、左面での反時計 l, 時計 L

後面での反時計 b, 時計 B、下面での反時計 d, 時計 D

エッジキューブの回転 中央(middle) 左面から見て反時計 m, 時計 M、

側面(side) 前面から見て反時計 s, 時計 S、

横面(equator) 上面から見て反時計 e, 時計 E

(途中 省略)

### 3. ルービック・キューブと群論そして J

ルービック・キューブの操作の攻略法はだれでも究めたいところである。

ところが、これがなかなか難しい！ 数学としては群論の助けを借りることになる。

ここでも、以前のレポートから採録する。

#### 群論とルービック・キューブ

群論とは（数学そのものがそうだが）、図形や構造の運動を考察するのに、同じ挙動を示す(数学的には同形写像 isomorphism と言う) 数式の演算処理を利用する考え方のツールだと言えよう。つまり解析幾何と同じに数式の演算のほうが楽だからである。ルービック・キューブに限らず立体幾何の問題はユークリッドやピタゴラスの天才には易しくても、ふつうの頭には至難のわざである。しかし、現代のコンピュータを使った演算ならわれわれにも可能である。群論はそういう道具なのではないだろうか。

ルービック・キューブの解析の難しさのポイントは次の点にある。

ルービック・キューブの各 cubelet (位置、色) の移動は、本来

3次元空間内における運動  $(x(t), y(t), z(t))$  である。

↓

これを、文字、記号の置き換えとして計算する。

つまり群論の置換群である。この考え方が、同型写像(Isomorphism)と呼ばれ、群論が数学の他の分野と違った価値観を持ち、有能な理由である。

#### J と群論

さらに、われわれにとって、有利なことは、群論の置換操作は J のプリミティブの動詞 C. として備えられている。なお、群の元つまり操作とは J と同じく動詞である。

#### ルービック・キューブと J

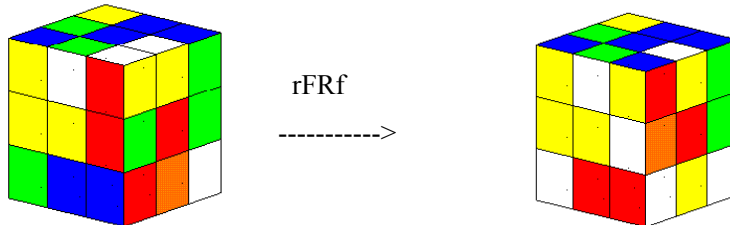
つまるところ、ルービック・キューブの動きは、J でプログラムすることが出来る、ということになる。加えて、J の OpenGL 機能により 3次元のグラフィックス・システムが可能になる。

(途中 省略)

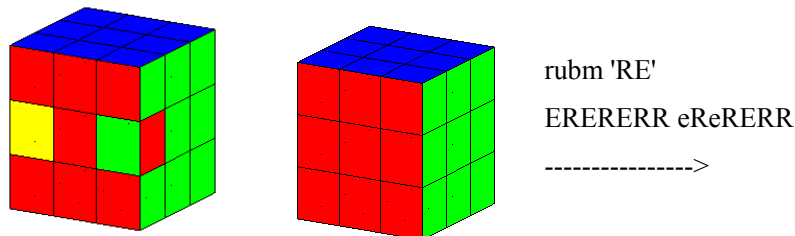
## 5. OpenGL による 3D グラフィックスの実際

ルービック・キューブの操作を 3D グラフィックスの実行の実際を示す。

いろいろ動かして、左図のようになった。次に黄色面の右下コーナ・キューブ青を上段に移動したい。ここで、定石  $rFRf$  を使って移動させると、右図のようになる。



上段が揃ったら攻略法として、下段のコーナ、エッジ、最後に中段と揃えて行く。大切なことは、この段階ではすでに揃ったキューブレットの配置を崩さないで、進めて行かなくてはならない。ここでルービック・マヌーバと呼ばれるすばらしい定石の効果を示す。最後に残った 2 つのキューブレットの位置を変えず向きだけを変える。



### 文献

- [1] 西川利男 「J-OpenGL によるルービック・キューブの 3D グラフィックス」  
JAPLA 研究会資料 2011/10/22
- [2] 西川利男 「J 言語からの群論の理解—その 2」 JAPLA 研究会資料 2011/11/26  
「J 言語からの群論の理解—その 3—直接置換、巡回置換、互換、隣接互換—」  
JAPLA シンポジウム資料 2011/12/10
- [3] D. Joyner, 川辺治之訳 「群論の味わい—置換群で解き明かすルービック・  
キューブと 15 パズル」 共立出版(2010).
- [4] 「頭を鍛えるルービックキューブ完全解析！」 宝島社(2007).
- [5] 西川利男 「技術数学に向けての群論のすすめ—ルービック・キューブで学ぶ群論  
と 3D コンピュータ・シミュレーション—」 日本技術史教育学会、2012 年度総会.
- [6] 西川利男、中野嘉弘、林雄二 「J 言語によるウィンドウズ・プログラミング  
—ルービック・キューブのシミュレーション—」 北海道情報大学紀要 10, 11 (1998).