

パスカルの三角形を巡って

SHIMURA Masato

2017年5月29日

目次

1	2項定理とパスカルの三角形	1
2	プロジェクトオイラーの例題	6
付録 A	パスカルの三角形と経路樹の数	9

1 2項定理とパスカルの三角形

1.1 パスカルの三角形

- 次の簡潔なスクリプトでパスカルの三角形が得られる。

```
|: (i.6)!/i.6
1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0
1 2 1 0 0 0
1 3 3 1 0 0
1 4 6 4 1 0
1 5 10 10 5 1
```

- パスカルの三角形のスクリプトの例

```
NB. pascal triangle
pascal=: 3 : ' |: (i.y)!/i.y'
NB. usage: pascal 6
```

このパスカルの三角形は古代ギリシャのユークリッドやアラブ、インド、中国の中世の多くの数学者が研究し、近世のヨーロッパに伝わったもので、パスカルのオリジナルではないようだ。

1.2 パスカルの三角形と多項定理

パスカルの三角形は2項定理、2項係数と表裏にあり、多くの紹介論文がWIKIにも挙げられている。

- 次は多項定理での多項式の係数を求めるJのイディオムである。

```
pmul=: +//.@(*/)
```

- NUVOC の例題

```
1 2 pmul 3 4 2
3 10 10 4
```

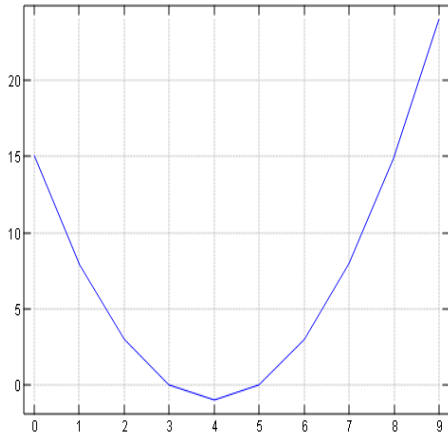
$$(2x + 1)(2x^2 + 4x + 3) = 4x^3 + 10x^2 + 10x + 3$$

- Jの多項式は p. で求められる。

```
plot 15 _8 1 p. i.10
```

Jの係数の入力方法は定数項が左で高次項が右に来る

$$f = x^2 - 8x + 15$$



- `pmul=: +//.@(* /)` の経過と解説
 - 外積

マトリクスの外積を作ったら、薩摩示現流右八双で斜め切りすれば、掛け算ができています。引数の `x,y` を逆にすると縦マトリクスになるが、結果は同じである。

```
1 1 */ 1 2 1
```

```
1 2 1
1 2 1
```

```
1 / 2 / 1 /
/ 1 / 2 / 1
```

```
</. 1 1 */ 1 2 1
```

```
+--+---+---+--+
|1|2 1|1 2|1|
```

- `oblic /.` (斜めに取りだす) の後、ボックス内の足上げ。(L:0 は不要で計算後ボックスを開いてくれる)

```
+//. 1 1 */ 1 2 1
```

```
1 3 3 1
```

- `pmul` の便利な用法

1 1 pmul ^:(i.5) 1 1

1 1	0	0	0	0
1 2	1	0	0	0
1 3	3	1	0	0
1 4	6	4	1	0
1 5	10	10	5	1

1 1 pmul ^:(i.5) 1 1

1 2 1

1.3 パスカルの三角形の色々な特性

1. パスカルの3角形を横書きにしてみる

$(i.11)!/i.11$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}_nC_0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
${}_nC_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}_nC_2$	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
${}_nC_3$	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
${}_nC_4$	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210
${}_nC_5$	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252
${}_nC_6$	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210
${}_nC_7$	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120
${}_nC_8$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45
${}_nC_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10
${}_nC_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

2. パスカルの3角形の各項の合計

- 各項の合計は 2^n となる
- 2^n

$2^{i.12}$

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048

- パスカルの三角形の各項の係数の合計

$$+ / (i. 11)! / i. 11$$

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024

3. 不思議な 6 角形性

84 を囲む 6 角形の不思議な性質

```

10 15 21 28 36 45
10 20 35 56 84 120
5 15 35 70 126 210
1 6 21 56 126 252

```

$$* / 28 120 126$$

423360

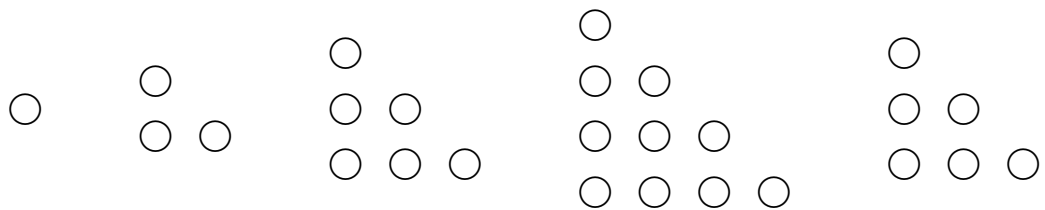
$$* / 36 56 210$$

423360

この関係は 84 の位置をずらしても成立する

4. 三角数が 3 行目に現れる

- 三角数を求める



- 三角数は J の簡潔なスクリプトで求めることができる

```
<\ >:i. 6
```

```

+---+---+---+---+---+---+
|1|1 2|1 2 3|1 2 3 4|1 2 3 4 5|1 2 3 4 5 6|
+---+---+---+---+---+---+

```

- J の Script。上の計算は次の簡潔なスクリプトで足りる

```
tri=: +/@:>:@]
```

2 プロジェクトオイラーの例題

プロジェクトオイラーは projecteuler.net で 600 問を超える数論とプログラムの設問が提示されており、正解すると *Forum* にあがった手練れの各言語の多様なスクリプトが鑑賞できる。2004 年に開始されたが、今でも多くの新規参入があり、賑わっている。R, Hui, E.Boss などの書いたスクリプトも見受けた。

このオイラープロジェクトの最初の入門コースでパスカルの 3 角形は大活躍である

2.1 三角数の約数の数

三角数の約数の数が 5 を超える最初の三角数は 28。では約数の数が 500 を超える最初の三角数は?

先に次のスクリプトで三角数を求め、エラトステネスに習って篩を作成したが、数が巨大になると計算に手間取る。

*1

約数の数を求める有名な定理があり、数だけを求めるなら計算は早い

$$a^x \cdots b^y \cdots c^z$$

約数の個数

$$(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1)$$

Script は次の 3 個で足りる。この 3 つをループで回せばよいが、出力を制限しないと小さい解であふれかえる

NB. -----new-----

*1 下手なアルゴリズムとスクリプトでアキレスとナメクジを味わった

```

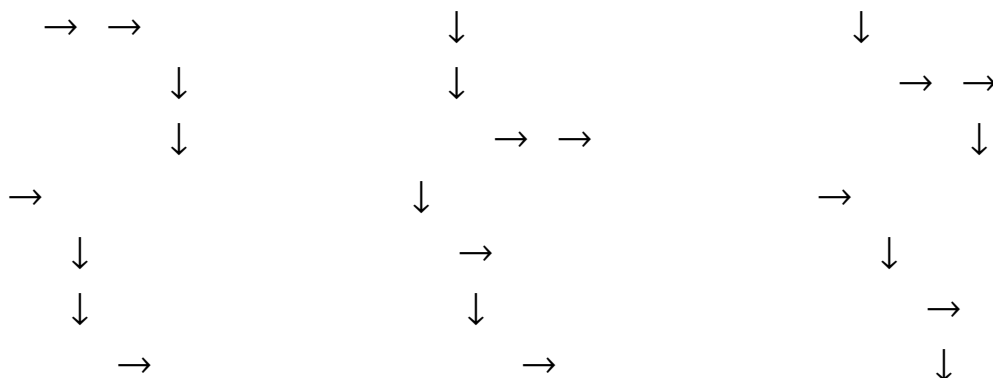
tri=: +/@>:@i. @] NB. triangle number
pri=: __&q:          NB. 1--> null
yaku=: */@>:@ {:

```

2.2 パスカルの3角形と経路樹

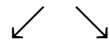
田の字の左上から右下への最短経路は次の6種である。

囿の字では？ これを $n = 10$ にすれば？

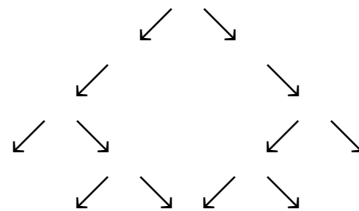


3次でも数え上げは大変なのでアルゴリズムを探る。系統樹を作ってみる

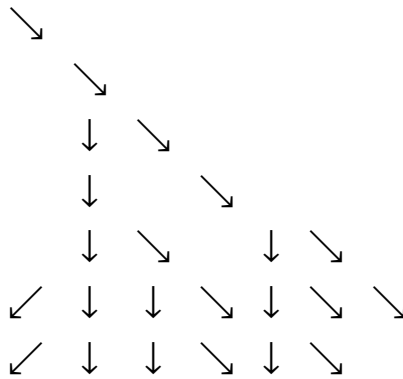
- 口の字は 2



- 田の字は 6



- 囿は (半分のみ記入)



これを表にすると次のようになる。

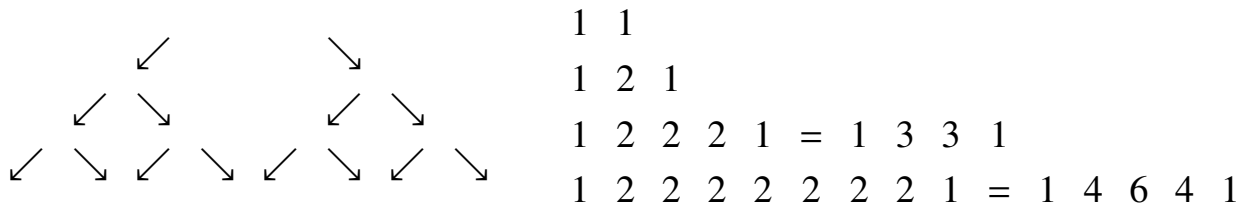
1	1	1					
2	1	2	2	1			
3	1	3	6	6	3	1	
4	1	4	10	20	10	4	1

パスカルの3角形ではないが多項定理に似た形が現れる。目を凝らしてパスカルの3角形と見比べると斜めにパスカルの三角形の拡大型が見て取れる。

2.3 経路樹を書き上げる。

パスカルの3角形で計算できる経路樹を全て書上げ。数式テーブルと照合して経路樹が拾い上げる数の最大値を求める問題。

パスカルの三角形の項別合計は各経路樹の数となる。これの組み合わせを根気よく拾い上げることとなる



経路樹は一本に2個ずつ増える。これは 2^n である。

付録 A パスカルの三角形と経路樹の数

ワークショップで次の解法を教えてもらった。

1 は *one way*, 2 は *2 way*, 逐次加算していくと解が求まる。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 6 \end{array}$$

眼で追うにはすっきりしている。*PC* に教えるのは面白そうだが *AI* の世界に踏み込みそうだ。

References

Graham Knuth Patashnik:有澤他訳「コンピューターの数学」共立出版
1993

2 項係数の詳しい解説がある

ProjectEuler

<http://projecteuler.net>