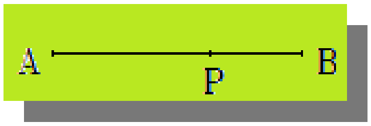
加平均と相乗平均



相加平均　≧　相乗平均　の証明

山本　洋一

二項目の証明から

…

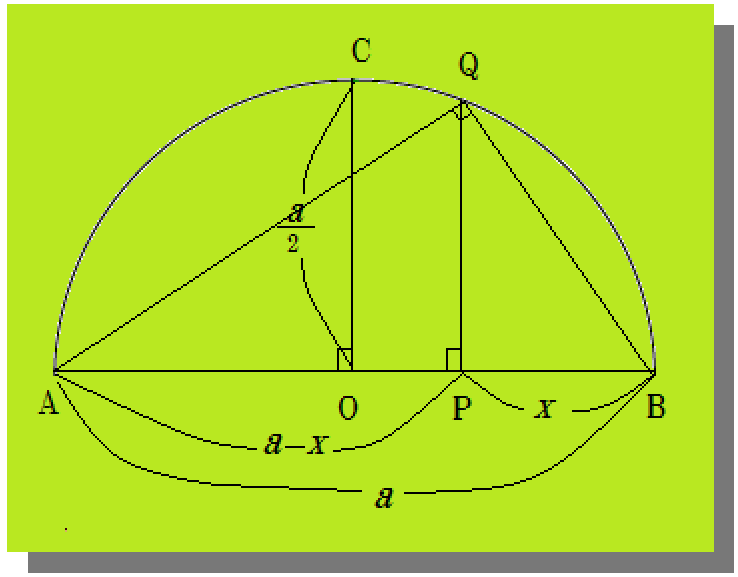
２項目から、　$(x_1+x_2)/2 \geqq \sqrt{(x_1 \times x_2)}$　は、　$a = x_1 + x_2$　とし、

上記　$x_1 = x$　$x_2 = a - x$　に置き換えます。　$(a - x)/2 \geqq \sqrt{\{x \times (a - x)\}}$

で証明します。

ユークリッドの線分に関す証明

から…　　a=AB　とします。



与えられた線分　AB　を　点　P　で分割したときに、線分の長さの積　**AP×PB**　**が最大**になるのは、

P　が　AB の**中点**　**O と**　**P が重なるとき**です。 図を参照

比率で　◿　AQP　∽　◿　QBP　　⇒

◿　AQP　と　◿　QBP　とは相似形。

∴　x ： PQ　＝　PQ　：　(a　—　x)

$PQ^2 = x(a - x)$　　$PQ = \sqrt{\{a(a - x)}$

AO ＝　OB ＝　CO　**a —　x= x ⇒**　**a/2**　で最大。

a/2 は　AB　の端点から中点　O までの距離。

∴　x_1 と　x_2 の場合は　$x_1 = x_2$　で最大になります。**相加平均　≧　相乗平均**　ということがいえます。

a/2 を相加平均とすれば…**相加平均は、　a/2　で、一定。**

相乗平均の最大は、$\sqrt{(a/2)^2} = a/2$

次の図形の証明は、 2 項目の別解です。

上記より別の図形…

中抜き正方形

中抜き正方形 ABCD の面積は、

$x(a - x) \times 4 = AP \times PB \times 4$

ここで x と a − x の平均は…

$\{x + (a - x)\}/2$

上記の面積を最大にするには、 P 点を 中点 O まで

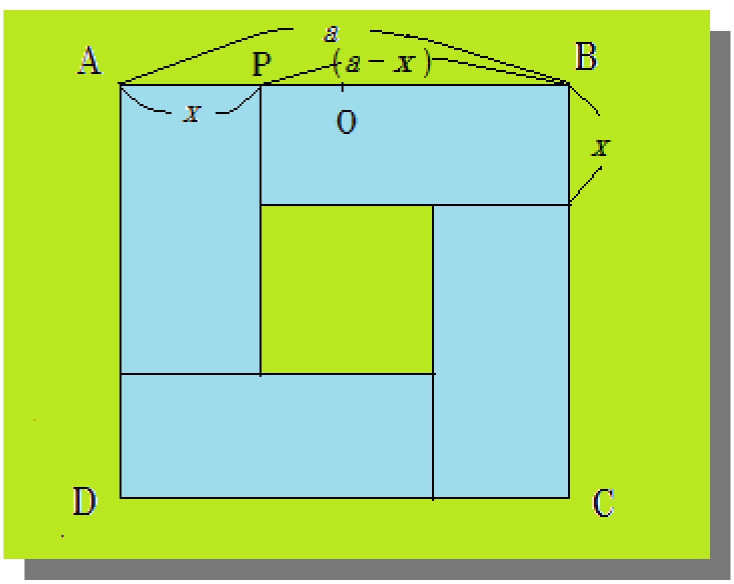
延長しますと、中抜き部分は、なくなります。

AP×PB は 最大となります。 AB の中点です。

最大の場合 a/2

または、 x_1、x_2 …は、 $x_1 = x_2$ である。

$a^2 \geqq 4(a - x)x$



$\Leftrightarrow a \geqq 2\sqrt{(a - x)x}$

$\Leftrightarrow a/2 \geqq \sqrt{(a - x)x}$

ここで

$x = a/2 \Rightarrow \sqrt{(a/2)^2} = a/2$ で

相乗平均は最大。

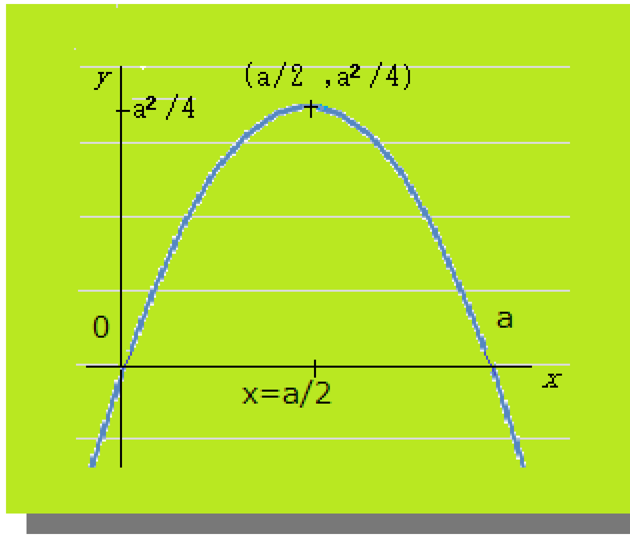
$\therefore (x_1 + x_2)/2 \geqq \sqrt{(x_1 x_2)} \Leftrightarrow$

$(x_1 + x_2)^2/4 \geqq (x_1 x_2)$

続く… 2 項目別解 微分による… $x_1 x_2 > 0$

x_1 と x_2 は $a = x_1 + x_2$ とし同様 x と (a − x) にします。 積を y とします。

$y = x(a - x)$ ⇔ $y = ax - x^2$ ⇔ $y = -x^2 + ax$ ———————— (1)



$y = -x^2 + ax$ を微分します。

$dy/dx = -2x + a$

$dy/dx = 0$ で極大・極小 $0 = -2x + a$ ⇒ $x = a/2$

$x = a/2$ で、 y は最大または最少。

凹凸判定。

$dy/dx = -2x + a$ もう一度微分します。

$d^2y/dx^2 = -2$ (負) 上に凸。 ∴ **$x = a/2$ は、最大。**

x_1、x_2 …は、正で、

(1)

に代入 $y = a^2/4$ ⇒相乗平均√ $y = \sqrt{(a^2/4)} = a/2$ 最大で相加平均と一致します。

$(x_1 + x_2)/2 \geqq \sqrt{(x_1x_2)}$ ⇔ $(x_1 + x_2)^2/4 \geqq (x_1x_2)$

x_1 、 x_2 、 x_3 3 項目の場合の証明。

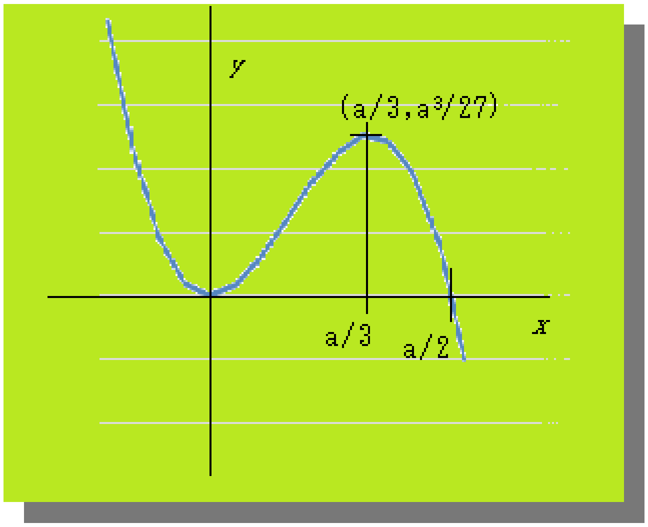
微分による…

２項目の証明より、 x_1、x_2は、 $x_1 = x_2$ が、二項目で証明されているので $a = x_1 + x_2 + x_3$ として、

x 、x 、 (a − 2x) の３項目で証明します。

a は、定数。

$y = (a - 2x)x^2$ ⇔ $y = ax^2 - 2x^3$ ⇔ $y = -2x^3 + ax^2$ ———————— (2)



微分します。

dy/dx ＝ ― $6x^2$ ＋ 2ax

dy/dx ＝ ― 2x(3x ＋ a)

dy/dx ＝ 0 と置き、ここで 極大極小 判定。

0 = ― 2x(3x ― a) ⇒ 解 x = 0 or x = a/3

極大、局小は 2 か所。

左 図参照 dy/dx ＝ ― $6x^2$ ＋ 2ax

をもう一回微分します。 d^2y/dx^2 ＝ ― 12x ＋ 2a

ここで、 d^2y/dx^2＝ 0 で、凹凸は…

極大、局小は 上記 0 ＝ ― 12x ＋ 2a で判定。

上記解 x = 0 or x = a/3 より

x = 0 の場合 d^2y/dx^2 ＝ 2a（正 ）で**下に凸。**

x = a/3 の場合 d^2y/dx^2 ＝― 2a (負 ）で**上に凸。**

極大 x≧0 で x=a/3 は、最大。

(2) 式に、代入 **$y = a^3/27$**図参照 **$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a^3/27} = a/3$**

３項目は… $x_1 x_2 x_3 > 0$

相加平均 ≧ 相乗平均

$(x_1 + x_2 + x_3)/3 \geqq \sqrt[3]{(x_1 x_2 x_3)}$ 相乗平均は、 $x_1 = x_2 = x_3$ で最大になり、相加平均に等しくなります。

最大 x = a/3 ∵ x.>0 、 a>0

4 項目以上は… $x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \cdots)/ 4 \geqq \sqrt[4]{(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots)}$ 3 項までは、 3 項目は、証明済みなので、

$\mathbf{x = x_1 = x_2 = x_3}$ 、 $\mathbf{a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$ として、 4項目は、 $\mathbf{x_4 = a - 3x}$ に置き換えます。

$\mathbf{x_1\ x_2\ x_3\ x_4}$ の 積は $\mathbf{(a - 3x)\ x^3}$ に置き換えます。

$y = (a - 3x)\ x^3 \Leftrightarrow y = ax^3 - 3x^4$ dy/dx と d^2y/dx^2 を算出 **最大 x=a/4** $\because$ **a>0**

5項目は、 4項目証明済みから

$y = (a - 4x)\ x^4 \Leftrightarrow y = ax^4 - 4x^5$ dy/dx と d^2y/dx^2 を算出 **最大 x=a/5** $\because$ **a>0**

同様に項目を増やしますと…

$y = (a - 5x)\ x^5 \Leftrightarrow y = ax^5 - 5x^6$ dy/dx と d^2y/dx^2 を算出 **最大 x=a/6**

$\because$ **a>0**

… … …

参照と引用文献

川田直樹著　高校数学体系　定理・公式の例解辞典

ユークリッド線分・分割にかんする定理。

瀬山士郎著　数字と記号を読む辞典　中抜き正方形の図形より。