ペル方程式のマトリクスを用いた計算アルゴリズム

SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.com
URL:http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue

2015 年 12 月 16 日

目次

1	連分数はユークリッド互除法で	2
2	漸化式はマトリクスで計算	6
3	Pell 方程式の計算例	12
4	大数のペリアン	16
5	一次不定方程式	18
付録 A	Script	19

概要

「1657 年 2 月にフェルマは $nx^2 + 1 = y^2$（n は非平方の自然数）の整数解を求める問題を公に提出した。連分数に関するウオリスとブランカーの新しい貢献は、翌年初めまでに彼らが得たこの問題に得た解の内に見られるものである。」

原亨吉「近世の数学」には詳しい年月まで紹介されている。17 世紀の中ごろにはヨーロッパでも解法が見つかったペル方程式は今日でも数論の高峰である。

ここでは J 言語の高度数値計算機能とマトリクス演算を用いて登頂を目指した。

アルゴリズムの概要

ペル方程式のアルゴリズムの概要

1. ユークリッド互除法で連分数と除数を求める
2. 種数から周期リストを作成する
3. 周期リストを $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の左肩に乗せる
4. 連続したマトリクスの内積を計算する
5. 検算

1　連分数はユークリッド互除法で

1.1　ユークリッド互除法

以前作成したユークリッド互除法のスクリプトを確認し、$\sqrt{D}$ の連分数を求められるように改良する

1. 連分数
   - (後ろから)2 個の数を取出し、剰余を求めるため昇順にソート (`/:~`)。
     ```
        /:~@(_2&{.) 19 11
     11 19
     ```
   - 2 数の剰余を取り出す (`11 | 19`) (除算は行っていない)
     ```
        |/@:  /:~@(_2&{.) 19 11
     8
     ```
   - 結果を後尾に連結する (`] , `)
     ```
       ( ], |/@:  /:~@(_2&{.)) 19 11
     19 11 8
     ```
   - タシット型のループ　`^:(n)`　i.n で経過を逐次取りだす

```
( ], |/@:  /:~@(_2&{.))^:(i.6) 19 11

19 11 0 0 0 0 0
19 11 8 0 0 0 0
19 11 8 3 0 0 0
19 11 8 3 2 0 0
19 11 8 3 2 1 0
19 11 8 3 2 1 0
```

$$\frac{19}{11} = 1 + \frac{8}{11}$$

$$\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$$

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

2. 連分数の商の列 (list) を求める

```
  euc1 euc0^:(i.6) 19 11
1 1 2 1 2 _
```

3. 連分数

$$\frac{19}{11} = [1, 1, 2, 1, 2]$$

$$\frac{19}{11} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

4. 結果が見やすいように補助関数を作成する

```
      6 mk_cf 19 11x
19r11 11r8 8r3 3r2 2
    1    1   2   1 2
```

[*1]

5. ユークリッド互除法の簡潔なスクリプト。

J 言語など最近の数値計算言語は数の方を用いないで拡張整数で内部演算を行っている。y の双方、少なくとも片方に x を付けた拡張整数を用いる。

```
euc1=: 3 : ' <. 2%/\ {: y'
euc0=: ],|/@: (/:~@( _2&{.))
NB. Usage: euc0 ^:(i.6) 105 38
```

[*1] 最後の項が 1r2 になっていない

```
NB. Usage:euc1  euc0 ^:(i.5) 105 38

mk_cf=: 4 : 'tmp0 ,: 0, <. _1 x: tmp0=.2%/\(* tmp0) # tmp0=:{: euc0 ^:(i.x) y
NB. Usage:   6 cf0 105 38x
NB. x is repeat times
NB. add x to last number(important!)
```

1.2 ペル方程式の $\sqrt{D}$ の連分数を求める

ここでは J の高度な数値計算機能を活用する。

1. $\sqrt{D}$ を連分数化する。列の長さは結果を見ながらハンドメイドで。
   - 最近の数値計算言語は内部演算は分数で行っていることが多い。拡張整数 (x) と拡張表示機能 (x:) を使い、分子と分母を分離してユークリッド互除法に載せる

通常の表示	`x: %: 2x`	1.41421
内部では分数で保存している	`x: %: 2x`	431273813145r304956637823
分数を分子と分母に分離	`2 x: %: 2x`	431273813145 304956637823

1.3 幾つかの計算例

ペル方程式のアルゴリズム (1) D を平方数でない自然数とすると、$\sqrt{D}$ の連分数展開は

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}] \qquad (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} < 2a_0)$$

となり、ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ の最小自然数解は次のように与えられる
連分数の整数項に初項 a_0 の 2 倍の大きさを持った値が現れる。
$[a_0, \overline{a_1, \cdots, a_{n-1}, a_0}]$ の初項 a_0 から a_n までを list とする

$\sqrt{D}$ を分数に分解したらユークリッド互除法を用いて連分数化して、商のリストを求める。次のように $\sqrt{D}$ の連分数は初項 a_0 の 2 倍の数が出るのでこの 2 倍の値までの「周期リスト」を作成する
$\sqrt{D}$ にユークリッド互除法を適用し、連分数化するスクリプトを作成する。
find_cf は単項両項兼用型で、単項は 12 項までと固定し、両項は $\sqrt{61}$ のような複雑なリストを指定個数（長くも短くも）とれる。

```
find_cf=: 3 : 0
({. tmp1),euc1 euc0 ^:(i. 12) 1,{: tmp1=: s2f0 y
 :                        NB. monad&dyad
({. tmp1),euc1 euc0 ^:(i.x) 1,{: tmp1=: s2f0 y
)
```

```
   find_cf 2x
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

   find_cf 3x
1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2

   find_cf 5x
2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

   find_cf 7x
2 1 1 1 4 1 1 1 4 1 1 1 4

   find_cf 11x
3 3 6 3 6 3 6 3 6 3 6 3 6

   find_cf 13x
3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 1 1
```

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \cdots] = [1, \overline{2}]$$

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots] = [1, \overline{1, 2}]$$

$$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \cdots] = [2, \overline{4}]$$

$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, \cdots] = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$$

$$\sqrt{11} = [3, 3, 6, 3, 6, \cdots] = [3, \overline{3, 6}]$$

$$\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \cdots] = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$$

2　漸化式はマトリクスで計算

2.1　周期リストの作成

漸化式はマトリクスを用いた方が見通しが良く、簡潔なスクリプトで計算できる

ペル方程式のアルゴリズム (2)

連分数の商の整数で初項 $a0$ の 2 倍の値が出るまでの「周期リスト」を取り、初項を除くオーバーラインの整数の個数をカウントする。

1. list のオーバーバーの個数が 1 個の場合は周期リストはそのまま用いる

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}] \to list = 1, 2$$

2. リストのオーバーバーの部分の個数が偶数のときは周期リストの末尾を落とす

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}] \to list = 2, 1, 1, 1$$

3. n が奇数のときは周期リストに複製した周期リストの付加部の初項と末尾を落としたものを付加する

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{a_{n+1}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} p_{2n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}] \to list = 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1$$

4. $x^2 - Dy^2 = -1$ タイプの場合は (2) と同じく list の末尾を落とす

$$\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}] \to list = 3, 1, 1, 1, 1$$

ここから次の性質が成り立つ

$a_1, \cdots, a_{n-1}$ は a_0 以下である。従って $2a_n$ が初めて現れるところまでが周期である。

$\sqrt{2}$ から $\sqrt{99}$ までの周期リストを概観してみよう。長いものや奇数は解が大きくなる。

1. オーバーラインが一個
   - $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$
   - $\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$
   - $\sqrt{10} = [3, \overline{6}]$
   - $\sqrt{17} = [4, \overline{8}]$
   - $\sqrt{26} = [5, \overline{10}]$
   - $\sqrt{37} = [6, \overline{12}]$
   - $\sqrt{50} = [7, \overline{14}]$
   - $\sqrt{65} = [8, \overline{16}]$
   - $\sqrt{82} = [9, \overline{18}]$
2. オーバーラインが奇数
   - $\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$
   - $\sqrt{29} = [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$
   - $\sqrt{41} = [6, \overline{, 2, 2, 12}]$
   - $\sqrt{53} = [7, \overline{3, 1, 1, 3, 14}]$
   - $\sqrt{58} = [7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$
   - $\sqrt{61} = [7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}]$
   - $\sqrt{71} = [8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]$
   - $\sqrt{85} = [9, \overline{4, 1, 1, 4, 18}]$
   - $\sqrt{89} = [9, \overline{2, 3, 3, 2, 18}]$
   - $\sqrt{98} = [9, \overline{1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18}]$
3. 最長 $\sqrt{94} = [9, \overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18}]$

```
    32 find_cf 94
9 1 2 3 1 1 5 1 8 1 5 1 1 3 2 1 18 1 2 2 2 1 1 8 1 82 1 2 1 1 2 1 19
```

2.2 ベースになるマトリクス

- 目的のマトリクスの作成

```
base_mat=:1 1,:1 0


1 1
1 0
```

- マトリクスを数個ボックス状に並べる。(<) でボックス化して、指定個数のコピーを作成すればよい。

```
   3#<base_mat
+---+---+---+
|1 1|1 1|1 1|
|1 0|1 0|1 0|
+---+---+---+
```

- 指定個数
個数の指定はオーバーラインの数列の個数で行う。$x^2 - Dy^2 = 1$ 型では偶数の場合は連分数の数列の末尾を一個落とす。偶数か基数の判定はスクリプトに任せよう。

$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, \cdots] = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$$

周期リストのオーバーラインの数列は 4 個で偶数なので末尾を落とし、[2, 1, 1, 1,] を用いる
マトリクスの計算は calc_pell_mat に任せて、条件分岐でリストを整理している。

```
calc_pell=: 3 : 0                              NB. Pell equation
NB. Usage: calc_pell 2 1 1 1 4  --> 8 5,: 3 2
NB. pell equation is x^2-7*sqrt7y^2=1 -- >8^2 -y*3^2=1
NB.y is sqrt(7) ->[2 ,1 1 1 4 ](even) --> even ->drop tail of 4
select. 2=#y
 case. 1 do. list =. y
 fcase. do.
    if. 0 = 2 | # }. y
      do. list =.}: y
      else.  list=. }: y, }.y
    end.
end.         NB.overbar parts is even-> drop last item
calc_pell_mat list
)
```

2.3　アメンド＝入れ替え

並べたベースマトリクス $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の各先頭の一個を連分数の数列に入れ替える

J のアメンド機能は習熟が必要なので、ここで復習しておこう

アドレスを指定して入替

```
3(<0 0)}mat

3 1
1 0
```

複数のマトリクスでの入替。ボックスの中へは（L:0) で入り、各ボックスの計算を行う。

```
({@> 1 2)(<0 0)} (L:0)  2# <mat
+---+---+
|1 1|2 1|
|1 0|1 0|
+---+---+
```

2.4　マトリクス相互の内積

$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$ の場合

1. 4 個のマトリクスの作成

```
   a=. ({@> 2 1 1 1)(<0 0)} (L:0)  4# <mat
    a
+---+---+---+---+
|2 1|1 1|1 1|1 1|
|1 0|1 0|1 0|1 0|
+---+---+---+---+
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. マトリクスの間に内積演算を挟む。ここでボックスで連結したマトリクスから、$4 \times 2 \times 2$ のマトリクスに開いて (>),3 元マトリクス相互間の内積を計算する ((+/ . *)/)

```
   (+/ . *)/ > a
8 5
3 2
```

3. ボックス間で内積を計算するスクリプト

```
mat_mp=: [: +/ . * / >

calc_pell_mat=: 3 : 0
list=. y
tmp=. ({@> list )(<0 0)}(L:0) (# list) # <base_mat
tmp,<mat_mp tmp
)

   calc_pell_mat 2 1 1 1
+---+---+---+---+---+
|2 1|1 1|1 1|1 1|8 5|
|1 0|1 0|1 0|1 0|3 2|
+---+---+---+---+---+
```

4. $x^2 - 7y^2 = 1$ の最小自然数解は $8 + 3\sqrt{3}$ である
5. 検算

```
   64-7*(3^2)
1
```

```
   test_pell 7;8 3
+-+---+-+
|7|8 3|1|
+-+---+-+
```

```
test_pell=: 3 : 'y,<-/ (1,>{. y) * *: >{: y'
```

2.5 ペル方程式の一般解

ペル方程式の一般解

$x^2 - Dy^2 = 1$ を満たす自然数解のうちで $x + y\sqrt{D}$ を最小解を (p, q) とすると一般解は次により求まる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & Dq \\ q & p \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x^2 - 2y^2 = 1$

```
   6 find_cf 2x
1 2 2 2 2 2 2


   calc_pell 1 2
+---+---+---+
|1 1|2 1|3 1|
|1 0|1 0|2 1|
+---+---+---+
```

左の列が一般解となる

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 99 \\ 70 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 577 \\ 408 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3363 \\ 2378 \end{pmatrix}, \cdots$$

1. $\begin{pmatrix} p & Dq \\ q & p \end{pmatrix}$ を作成する

```
   a=.3 4 ,: 2 3
3 4
2 3

   (+/ . *)/> ^:(i.2) a
17 24
12 17


   (+/ . *)/> ^:(i.3) a
99 140
70  99


   (+/ . *)/> ^:(i.4) a
577 816
408 577
```

```
   (+/ . *)/> ^:(i.6) a
3363 4756
2378 3363

   (+/ . *)/> ^:(i.6) a
19601 27720
13860 19601
```

3 Pell 方程式の計算例

3.1 Pell 方程式のスクリプト

入力の手間を省くためスクリプトを整理した。(1) の反復区間の判定は目で行う。検算用の関数も作成した。

Script は Appendix に

1. `find_cf` NB. 連分数を求める
2. `calc_pell` NB. 周期リストの整理と main
3. `calc_pell_mat` NB. マトリクスのボックスの計算パート
4. `test_pell` NB. 検算

- Script
- $\sqrt{2}$

```
   6 find_cf 2
1 2 2 2 2 2
   calc_pell 1 2
+---+---+---+
|1 1|2 1|3 1|
|1 0|1 0|2 1|
+---+---+---+
   test_pell 2;3 2
+-+---+-+
|2|3 2|1|
+-+---+-+
```

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

$$3 + 2\sqrt{2}$$

- $\sqrt{3}$

```
   6 find_cf 3
1 1 2 1 2 1

   calc_pell 1 1 2
+---+---+---+
|1 1|1 1|2 1|
|1 0|1 0|1 1|
+---+---+---+

   test_pell 3;2 1
+-+---+-+
|3|2 1|1|
+-+---+-+
```

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

$$2 + \sqrt{3}$$

- $\sqrt{5}$

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

$$9 + 4\sqrt{5}$$

```
   6 find_cf 5
2 4 4 4 4 4
   calc_pell 2 4
+---+---+---+
|2 1|4 1|9 2|
|1 0|1 0|4 1|
+---+---+---+
   test_pell 5;9 4
+-+---+-+
|5|9 4|1|
+-+---+-+
```

- $\sqrt{7}$

$$x^2 - 7y^2 = 1$$

$$8 + 3\sqrt{7}$$

```
   15 find_cf 7
2 1 1 1 4 1 1 1 4 1 1 1 4 1 1
   calc_pell 2 1 1 1 4
+---+---+---+---+---+
|2 1|1 1|1 1|1 1|8 5|
|1 0|1 0|1 0|1 0|3 2|
+---+---+---+---+---+
   test_pell 7;8 3
+-+---+-+
|7|8 3|1|
+-+---+-+
```

- $\sqrt{11}$

$$x^2 - 11y^2 = 1$$

$$10 + 3\sqrt{11}$$

```
   6 find_cf 11
3 3 6 3 6 3
   calc_pell 3 3 6
+---+---+----+
|3 1|3 1|10 3|
|1 0|1 0| 3 1|
+---+---+----+
   test_pell 11;10 3
+--+----+-+
|11|10 3|1|
+--+----+-+
```

- $\sqrt{13}$

  $\sqrt{13}$ は 2 から初めて最初の奇数タイプで list=. 3 1 1 1 1 6 を list=.3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 に延ばすタイプである。

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

$$649 + 180\sqrt{13}$$

```
   12 find_cf 13
3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 1 1
   calc_pell 3 1 1 1 1 6
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+----
|3 1|1 1|1 1|1 1|1 1|6 1|1 1|1 1|1 1|1 1|649
|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|180
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+----
   test_pell 13; 649 180
+--+-------+-+
|13|649 180|1|
+--+-------+-+
```

$x^2 - Dy^2 = -1$ タイプも計算できる。-1 タイプは偶数タイプと同じくリストの最期を落とせばよい。

```
   calc_pell_m1 3 1 1 1 1 6
+---+---+---+---+---+-----+
|3 1|1 1|1 1|1 1|1 1|18 11|
|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0| 5  3|
```

```
+---+---+---+---+---+-----+
```

3.2　フェルマーの問題

$$x^2 - 61y^2 = 1$$

フェルマーも相当複雑な問題を出したものだ。

$$1766319049 + 226153980\sqrt{61}$$

```
   24  find_cf 61
7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14 1 4 3 1 2 2 1 4 3 2 1 3 2
   2 12 $ calc_pell  7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---------------------+----+
|7 1|1 1|4 1|3 1|1 1|2 1|2 1|1 1|3 1|4 1|1 1                 |14 1|
|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0                 | 1 0|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---------------------+----+
|1 1|4 1|3 1|1 1|2 1|2 1|1 1|3 1|4 1|1 1|1766319049 1431159437|
|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0| 226153980  183241189|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+---------------------+

   test_pell 61;  x: {."1 > {: calc_pell 11 find_cf 61x
+--+--------------------+-+
|61|1766319049 226153980|1|
+--+--------------------+-+
```

4　大数のペリアン

JAPLA Workship 2009/03 に上がっているペル方程式の名作に挑戦してみよう。
山下紀幸　中野嘉弘「大数ペリアンの話題-Beiller 本中の巨大数」2009/03

1. 1515
   $x = 506 \qquad y = 13$

```
   find_cf 1515
38 1 11 1 76 1 11 1 76 1 11 1 4

  calc_pell 38 1 11 1 76
+----+---+----+---+-------+
|38 1|1 1|11 1|1 1|506 467|
| 1 0|1 0| 1 0|1 0| 13  12|
+----+---+----+---+-------+

   test_pell 1515;506 13
+----+------+-+
|1515|506 13|1|
+----+------+-+
```

2. 1516
   周期リストが得られない。

```
   48 find_cf 1516x
38 1 14 1 1 2 2 1 2 1 1 5 1 10 3 1 1 1 1 1 1 8 1 9 2 1 1 25
 3 9 3 2 2 1 2 _ 0 1 _ 0 1 _ 0 1 _ 0 1 _ 0
```

   山下、中野によると、1516,1517 は解が 33 桁を超える。お二人はこの解を求めるスクリプトを作っておられる。中には 200 桁近い解があると報告されている。億、兆、京ときても $\times 10^{16}$ である。

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

$$x \approx \sqrt{D}y$$

   数論と高度数値計算の狭間にあるこの $\approx$ に怪しい香りがするが、ペリアンの解の存在定理と見比べたりしてもすっきりしない。
   先達が登頂した頂上を見上げ、永く広い裾野を彷徨うことと相成った。

5　一次不定方程式

ペル方程式と同様のマトリックス解法で解が得られる。($p \to y, q \to x$) となる

1. $105x + 38y = 1$

$$\frac{105}{38} = [2; 1, 3, 4, 2]$$

```
   6 mk_cf 105 38x
105r38 38r29 29r9 9r2 2
     2     1    3   4 2

     calc_pell_mat 2 1 3 4 2
+---+---+---+---+---+------+
|2 1|1 1|3 1|4 1|2 1|105 47|
|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0| 38 17|
+---+---+---+---+---+------+
```

ここでも最終項を落とすと次のようになる。

```
   calc_pell_mat 2 1 3 4
+---+---+---+---+-----+
|2 1|1 1|3 1|4 1|47 11|
|1 0|1 0|1 0|1 0|17  4|
+---+---+---+---+-----+
```

$$105 \times 17 - 38 \times 47 = -1$$

$$105 \times (-17) - 38 \times 47 = 1$$

$x = -17, y = 38$ が最小解である。

付録 A　Script

```
NB. Euclid gojyohou
euc1=: 3 : ' <. 2%/\ {: y'
euc0=: ],|/@: (/:~@( _2&{.))
NB. Usage: euc0 ^:(i.6) 105 38
NB. Usage:euc1  euc0 ^:(i.5) 105 38

NB. viewer of contunious fraction
NB. Usage:   6 mk_cf 19 11x
NB. x is repeat times
NB. add x to last number(important!)
mk_cf=: 4 : 'tmp0 ,: 0, <. _1 x: tmp0=.2%/\(* tmp0) # tmp0=:{: euc0 ^:(i.x) y'
NB. ****************************
NB. ----------------------------------------
NB. calc pell equation
NB. Usage euclid  using Extended precision 2 x:
NB.  euc1  euc0 ^:(i.6) 2 x: %: 5x



NB. ---sub script---
s2f =: [: 2&x: %:          NB. square to contuneous fraction for pellian D
base_mat=:  1 1,:1 0       NB. make base matrisex
mat_mp=: [: +/ . * / >     NB. innner products for many continueous matrices

NB. ---main script-----------
find_cf=: 3 : 0
({. tmp1),euc1 euc0 ^:(i. 12) 1,{: tmp1=: s2f0 y
NB. find continueou fraction  // i.n is fixed 12
NB. Usage:  find_cf 3   NB. not sqrt 3
 :
```

```
NB. find_cf2=: 4 : '
({. tmp1),euc1 euc0 ^:(i.x) 1,{: tmp1=: s2f0 y
NB. dyad type
NB.  20 find_cf2 13   // for long term x is length
)
calc_pell=: 3 : 0                              NB. Pell equation
NB. Usage: calc_pell 2 1 1 1 4  --> 8 5,: 3 2
NB. pell equation is x^2-7*sqrt7y^2=1 -- >8^2 -y*3^2=1
NB.y is sqrt(7) ->[2 ,1 1 1 4 ](even) --> even ->drop tail of 4
select. 2=#y
 case. 1 do. list =. y
 fcase. do.
    if. 0 = 2 | # }. y
      do. list =.}: y
      else.  list=. }: y, }.y
    end.
end.         NB.overbar parts is even-> drop last item
calc_pell_mat list
)

calc_pell_mat=: 3 : 0
list=. y
tmp=. ({@> list )(<0 0)}(L:0) (# list) # <base_mat   NB. using amend--> input data
tmp,<mat_mp tmp                                NB. mp
)

calc_pell_m1=: 3 : 0                              NB. Pell equation
NB. Pellian x^2-Dy^2=_1 type
NB. Usage: calc_pell 2 1 1 1 4  --> 8 5,: 3 2
NB. pell equation is x^2-7*sqrt7y^2=1 -- >8^2 -y*3^2=1
NB.y is sqrt(7) ->[2 ,1 1 1 4 ](even) --> even ->drop tail of 4
list =.}: y
tmp=. ({@> list )(<0 0)}(L:0) (# list) # <base_mat   NB. using amend--> input data
```

```
tmp,<mat_mp tmp                                 NB. mp
)
```

```
test_pell=: 3 : 'y,<-/ (1,>{. y) * *: >{: y'     NB. check answer
NB. Usage: y is D;x y  --> lasy is 1 is OK
```

References

原　亨吉「近世の数学ー無限概念を巡って」ちくま学芸文庫　2013
1975　筑摩書店「数学講座１８：数学史」の「近世の数学　無限概念を巡って」の文庫版