ユークリッドの互除法、連分数と不定方程式

SHIMURA Masato
http://japla.sakura.ne.jp

2015 年 6 月 19 日

目次

1 連分数 2

1 連分数 2

概要

.

はじめに

銀林浩「初等整数論入門」(1966 国土社) が 2015 年にちくま学術文庫に入った。著者は高木貞治「初等整数論講義」を横に見て「現代数学的に、徹底的にやることとした」と宣言している。*[1]

計算問題も多く興味深く読んでいるが、その中でユークリッドの互助法と連分数、不定方程式に 1 章を割いている。

---

*[1] 銀林氏はかの E.T. ペル「数学を作った人々」(早川文庫版）の翻訳者でもある。

1　連分数

1.1　GCD

ユークリッドの互除法は余りを活用した除法で、最大公約数や連分数を見通しよく求めることができる。

J は GCD を +. に LCM を*. に割り付けている。

```
    105 +. 25
5         NB. GCD=5
    105 +. 38
1         NB. GCD=1
```

1.2　連分数

互除法を用いた連分数の導出過程

「例」
$\frac{105}{38}$

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{29}{38}$$

$$\frac{38}{29} = 1 + \frac{9}{29}$$

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9}$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{105}{38} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{9}{29}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{9}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

正則連分数に展開できた。次のようにも表す。

$$[2:1,3,4,2]$$

2　1次不定方程式

$$\begin{cases} p_s = & a_s p_{s-1} + p_{s-2} \\ q_s = & a_s q_{s-1} + q_{s-2} \end{cases}$$

s	0	1	$\cdots$	$s-2$	$s-1$	s	$\cdots$
a_s	a_0	a_1	$\cdots$	a_{s-2}	a_{s-1}	a_s	$\cdots$
p_s	a_0	a_0a_1+1	$\cdots$	p_{s-2}	p_{s-1}	$a_sp_{s-1}+p_{s-2}$	$\cdots$
q_s	1	a_1	$\cdots$	q_{s-2}	q_{s-1}	$a_sq_{s-1}+q_{s-2}$	$\cdots$

「例題」$105x+38y=1$ を解け
$\dfrac{105}{38}=[2:1,3,4,2]$

s	0	1	2	3	4
a_s	2	1	3	4	2
p_s	2	3	11	47	105
q_s	1	1	4	17	38

s	0	1	2	3	4
a_s	2	1	3	4	2
p_s	2	$3=2\times1+3$	$11=3\times3+2$	$47=11\times4+3$	$105=2\times47+11$
q_s	1	1	$4=3\times1+1$	$17=4\times4+1$	$38=2\times17+4$

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^{n-1}$$

$$aq_{n-1}-bp_{n-1}=(-1)^{n-1}$$

$$105\times17-38\times47=-1$$

$$105\times{}_{-}17+38\times47=1$$

$x=-17$　　　　　　$,y=47$ が一つの解

$$\begin{cases} x=-17+38t \\ y=47-105t \end{cases}$$

3　互除法をマトリクスで

ユークリッドの互除法をマトリクスに乗せる。

「例」$105x + 35y = 1$

$$
\begin{array}{rc|l}
 & & r_0 = a, r_1 = b \\
105 = & 2 \times 38 + 29 & r_0 = k_0 r_1 + r_2 \\
38 = & 1 \times 29 + 9 & r_1 = k_1 r_2 + r_3 \\
29 = & 3 \times 9 + 2 & r_2 = k_2 r_3 + r_4 \\
9 = & 4 \times 2 + 1 & r_3 = k_3 r_4 + r_5 \\
2 = & 2 \times 1 + 0 & r_4 = k_4 r_5 + r_6
\end{array}
$$

$[2:1,3,4,2]$ まで計算する

$$
\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 105 & 47 \\ 38 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

```
   ] m0=. 2 1,:1 0
2 1
1 0
    m1=. 1 1,:1 0
    m2=. 3 1,:1 0
    m3=. 4 1,:1 0
    m4=. 2 1,:1 0

   m0;m1;m2;m3;m4
+---+---+---+---+---+
|2 1|1 1|3 1|4 1|2 1|
|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|
+---+---+---+---+---+

   m0 +/ . * m1 +/ . * m2 +/ . * m3 +/ . * m4
105 47
 38 17
```

47 と 17 の組み合わせは求められるが、$(x, y)\pm$ までは分からない。

References

銀林浩「初等整数論入門」ちくま学芸文庫　2015