

ユークリッドの互除法、連分数と不定方程式

SHIMURA Masato
<http://japla.sakura.ne.jp>

2015 年 6 月 19 日

目次

1	連分数	2
1	連分数	2

概要

はじめに

銀林浩「初等整数論入門」(1966 国土社)が2015年にちくま学術文庫に入った。著者は高木貞治「初等整数論講義」を横に見て「現代数学的に、徹底的にやることとした」と宣言している。^{*1}

計算問題も多く興味深く読んでいるが、その中でユークリッドの互除法と連分数、不定方程式に1章を割いている。

^{*1} 銀林氏はかの E.T. ペル「数学を作った人々」(早川文庫版)の翻訳者でもある。

1 連分数

1.1 GCD

ユークリッドの互除法は余りを活用した除法で、最大公約数や連分数を見通しよく求めることができる。

JはGCDを+.にLCMを*.に割り付けている。

105 +. 25
5 NB. GCD=5
105 +. 38
1 NB. GCD=1

1.2 連分数

互除法を用いた連分数の導出過程

「例」
 $\frac{105}{38}$

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{29}{38}$$

$$\frac{38}{29} = 1 + \frac{9}{29}$$

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9}$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{9}{29}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{9}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

正則連分数に展開できた。次のようにも表す。

$$[2 : 1, 3, 4, 2]$$

2 1次不定方程式

$$\begin{cases} p_s = a_s p_{s-1} + p_{s-2} \\ q_s = a_s q_{s-1} + q_{s-2} \end{cases}$$

s	0	1	...	$s-2$	$s-1$	s	...
a_s	a_0	a_1	...	a_{s-2}	a_{s-1}	a_s	...
p_s	a_0	$a_0 a_1 + 1$...	p_{s-2}	p_{s-1}	$a_s p_{s-1} + p_{s-2}$...
q_s	1	a_1	...	q_{s-2}	q_{s-1}	$a_s q_{s-1} + q_{s-2}$...

「例題」 $105x + 38y = 1$ を解け

$$\frac{105}{38} = [2 : 1, 3, 4, 2]$$

s	0	1	2	3	4
a_s	2	1	3	4	2
p_s	2	3	11	47	105
q_s	1	1	4	17	38

s	0	1	2	3	4
a_s	2	1	3	4	2
p_s	2	$3 = 2 \times 1 + 3$	$11 = 3 \times 3 + 2$	$47 = 11 \times 4 + 3$	$105 = 2 \times 47 + 11$
q_s	1	1	$4 = 3 \times 1 + 1$	$17 = 4 \times 4 + 1$	$38 = 2 \times 17 + 4$

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

$$105 \times 17 - 38 \times 47 = -1$$

$$105 \times -17 + 38 \times 47 = 1$$

$$x = -17$$

, $y = 47$ が一つの解

$$\begin{cases} x = -17 + 38t \\ y = 47 - 105t \end{cases}$$

3 互除法をマトリクスで

ユークリッドの互除法をマトリクスに乗せる。

「例」 $105x + 35y = 1$

$$\begin{array}{rcl}
 105 = & 2 \times 38 + 29 & \\
 38 = & 1 \times 29 + 9 & \\
 29 = & 3 \times 9 + 2 & \\
 9 = & 4 \times 2 + 1 & \\
 2 = & 2 \times 1 + 0 &
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 r_0 = a, r_1 = b \\
 r_0 = k_0 r_1 + r_2 \\
 r_1 = k_1 r_2 + r_3 \\
 r_2 = k_2 r_3 + r_4 \\
 r_3 = k_3 r_4 + r_5 \\
 r_4 = k_4 r_5 + r_6
 \end{array} \right.$$

[2 : 1, 3, 4, 2] まで計算する

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 105 & 47 \\ 38 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```

] m0=. 2 1, :1 0
2 1
1 0
  m1=. 1 1, :1 0
  m2=. 3 1, :1 0
  m3=. 4 1, :1 0
  m4=. 2 1, :1 0

m0;m1;m2;m3;m4
+---+---+---+---+---+
|2 1|1 1|3 1|4 1|2 1|
|1 0|1 0|1 0|1 0|1 0|
+---+---+---+---+

m0 +/ . * m1 +/ . * m2 +/ . * m3 +/ . * m4
105 47
38 17

```

47 と 17 の組み合わせは求められるが、 $(x, y)_{\pm}$ までには分からない。

References

銀林浩「初等整数論入門」ちくま学芸文庫 2015