ブラーマグプタの不定方程式

SHIMURA Masato
http://japla.sakura.ne.jp

2015 年 3 月 13 日

目次

1　ブラーマグプタによる不等式の解法

ブラーマグプタ（598-668?　） 数理天文学者　インド中西部の都市 Ujjain の天文台長

インド古典時代の業績として、次の 2 次不当方程式が取り扱われた。著書はアラブ語に訳されて西洋にも伝わる。

$$ax^2 + 1 = y^2$$

の正の整数解を求める。

1.1　完全平方の場合

- $8x^2 + 1 = y^2$ を解け
- ブラーマグプタのアルゴリズム

1. 最小整数解は $x = 1 \longrightarrow y = 3$
2. クロスに $x = 1, y = 3$ をセットする

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow \ \nearrow & \\ & \nearrow \ \searrow & \\ 1 & & 3 \end{array}$$

3. 次の x をクロスで求め, 与式に代入して y を求める

$$1 \times 3 + 1 \times 3 = 6$$

$$8 \times 6^2 + 1 = 17^2$$

4. 最小解と次の解の組をセットする

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow \ \nearrow & \\ & \nearrow \ \searrow & \\ 6 & & 17 \end{array}$$

5. クロスして解を求める

$$1 \times 17 + 3 \times 6 = 35$$

$$8 \times 35^2 + 1 = 99^2$$

6. 最小解とその次の解の組をセットする

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow \ \nearrow & \\ & \nearrow \ \searrow & \\ 35 & & 99 \end{array}$$

7. クロスして解を求める

$$1 \times 99 + 3 \times 35 = 204$$

$$8 \times 204^2 + 1 = 557^2$$

- 解の組

$$(1, 3)(6, 17)(35, 99)(204, 557) \cdots$$

1.2 J のスクリプト

- J の多項式の定義

$$fx = 8x^2 + 1$$

```
f0=: 1 0 8&p.
```

```
    f0  1 6 35 204
9 289 9801 332929


   %:&f0  1 6 35 204
3 17 99 577
```

- 完全平方の場合の解法 bg0

```
     f0 bg0 1 0 8

     1      3 1
     6     17 1
    35     99 1
   204    577 1
  1189   3363 1
  6930  19601 1
 40391 114243 1
235416 665857 1
```

右の数は付加数であり、完全平方の場合は 1 になる

1.3 J の Script

```
f0=: 1 0 8&p.    NB. 8x^2 + 1= y^2


bg0=: 1 : 0
NB. Usage: f0 bg0 1 0 8  NB. y is repeat times
```

```
mattmp=:matfix=: 1, %: u 1
addnum0=. (u 1)- {: y
ans=. < mattmp,addnum0
for. i. 7 do.
  mattmp=. ans0, ans1=. %: u ans0=.+/ . * MAT NB. power(+/ . *)
  addnum1=. (*: ans1)- ({: y) * *: ans0
  ans=. ans,<mattmp,addnum1
end.
>ans
)
```

1.4 経過と解説

1. 関数の定義 $f = 8x^2 + 1 = y^2$

   `f0=: 1 0 8&p.` NB. J の係数の順序は $a + bx + cx^2$ となる

   ```
      f0 1
   9
   ```

2. 数式を (左）引数として用いるように副詞型で作成 `1 : 0`
3. 交差の式をマトリクスで組み上げる

   ```
      MAT
   1 3
   1 3
   ```

4. J のプリミティブ Power を用いる
   - マトリクス
     $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
   - 行列式の値 (determinant) は単項の `-/ . *` $\longrightarrow ab - cd$
   - power 単項の `+/ . *` $\longrightarrow ab + cd$

     交差式を足し上げると x の値が求まる

     ```
     -/ . * 1 3,:1 3
     ```

```
    0
       +/ . * 1 3,:1 3
    6
```

5. x を $f0$ に代入すると y^2 が求まる

```
   f0 1 6 35
9 289 9801
```

6. 最小解と最後の解でクロスマトリクスを構成して、反復する

1.5 幾つかの例題

$$3x^2 + 1 = y^2$$

```
   f1=: 1 0 3&p.  NB. 3x^2+1=y^2
   f1 bg0 1 0 3
    1      2 1
    4      7 1
   15     26 1
   56     97 1
  209    362 1
  780   1351 1
 2911   5042 1
10864  18817 1
```

$(1, 2), (4, 7), (15, 26), (56, 97), (209, 362) \cdots$

2 力技のパワーメソッド

2.1 反復を用いない方法

力技のスクリプト。反復を用いていないのでメモリーを消耗し、大きい数の探査には向かない。

```
indeterminate_power=: 1 : 0
ind=.  0=1&| tmp=. %: u  >:i.y
(>: I. ind),. ind # tmp
)
```

1. `u >:i. y` 関数を引数とする副詞型
2. `1&|` 剰余の有無を判定。0 ならば整数
3. `#` copy を用いて整数を抜き出す

- $8x^2 + 1 = y^2$

  ```
  f0=: 1 0 8&p.
  ```

  ```
     f0  indeterminate_power 1000
    1   3
    6  17
   35  99
  204 577
  ```

- $3x^2 + 1 = y^2$

  ```
  f1=: 1 0 3&p.
  ```

  ```
     f1  indeterminate_power 1000
    1    2
    4    7
   15   26
   56   97
  209  362
  780 1351
  ```

- $67x^2 + 1 = y^2$

  これは完全平方ではなく、2 つ目の解は離れている

  ```
  f3=: 1 0 67&p.
  ```

  ```
     x:  f3  indeterminate_power 2000000
     5967    48842
  1074292  8793459
  ```

```
1563149 12794926
```

- `f2=: 1 0 61&p.`　　$61x^2 + 1 = y^2$
  解の出は遅い

```
   x:  f2 indeterminate_power 3000000
1248098  9747957   NB. 最小解
2199211 17176387
2496196 19495914
```

226153980 1766319049 NB. バースカラ 2 世の最小解

2.2 反復を用いる方法

拡張精度と反復を用いて、探査する。メモリーの心配はないが速度は快適とはいかない。

- f1 $3x^2 + 1 = y^2$

```
     f1  indeterminate_loop 0 1000
  1    2
  4    7
 15   26
 56   97
209  362
780 1351
```

- f3　この程度でも *indeterminate_power* とは比較できないほどの時間を要する。

```
     f3  indeterminate_loop 0 2000000
   5967    48842
1074292  8793459
1563149 12794926
```

```
   a=.  f2 indeterminate_loop 226100000 226200000
   a
226101432 1765908636
```

```
226105237 1765938354
226109042 1765968072
226112847 1765997790
226116652 1766027508
226134955 1766170459
226138760 1766200177
226142565 1766229895
226146370 1766259613
226150175 1766289331
226153980 1766319049  NB. バースカラ 2 世の最小解

   x: f4 indeterminate_power 6500000
 963887  9493186     NB. 最小解
1557917 15343703
1927774 18986372
2521804 24836889
2891661 28479558
3115834 30687406
3261518 32122227
3485691 34330075
3855548 37972744
4079721 40180592
4225405 41615413
4449578 43823261
4673751 46031109
4819435 47465930
5043608 49673778
5189292 51108599
5413465 53316447
5559149 54751268
5637638 55524295
5783322 56959116
6007495 59166964
```

```
6153179 60601785
6231668 61374812
6377352 62809633     NB. バースカラ 2 世の最小解
```

3 バースカラ II 世

バースカラ II 世（1114-1185）インドの大数学、天文学者。ブラーマグプタの不定法手式の解法を発展させた。

不定方程式の解法はインド式のアルゴリズム数学の粋であり、手順を追って理解するのがよい。

$$61x^2 + 1 = y^2$$

(x, y) の組の最小解を求める

次によりバースカラ 2 世のアルゴリズムをトレースする

Vivek Sinha Forms and methods of solution of indeterminate equation of orders greater than one by Ancient Indian mathematician

1. $k = 1$ では y は整数にならない。(完全平方ではない）
2. $61x^2 + k = y^2$ *(1,8)* *k=3*
   k=3 $61 \times 1^2 + 3 = 8^2$
3. $\dfrac{m+8}{3}$ が整数で $||m^2 - 61||$ が最小となる m を求める
4. m は *7* となる。
5. $\dfrac{7+8}{3} = 5 \to x = 5$
6. *(5,39)* $61 \times 5^2 - 4 = 39^2$
7. ブラーマグプタの *Samasa* オペレーションを用いる
8. $5 \times 39 = 195$
9. $(195, 1523)$
10. $(3805, 29718)$
11. $(226153980, 1766319049)$ これを解としている

不定方程式はインドで色々解法が工夫された。ブラーマグプタからバースカラ *2* 世まで様々な計算が試され続けた。

プログラムをいろいろ試したがアルゴリズムがフォローできなかった

整数の判別

```
  1&|   33.12 33 _33.25
0.12 0 0.75
   0= 1 |  33.12 33 _33.25 0 _1
0 1 0 1 1

   check_integer=: 0=1&|
   check_integer 33.12 33 _33.25 0
 0 1 0 1
```

付録 A　連分数のスクリプト

```
d
   (i.10),.  1 x:  (+%)/\10$1x
0      1
1      2
2    3r2
3    5r3
4    8r5
5   13r8
6  21r13
7  34r21
8  55r34
9  89r55
```

```
   (i.10),. 2 x:  1 x:  (+%)/\10$1x
0  1  1
1  2  1
2  3  2
3  5  3
4  8  5
5 13  8
6 21 13
7 34 21
8 55 34
9 89 55
```

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

$$\frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{3}}$$

$$\frac{11}{3} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [3, 3, 1, 2]$$

References

ジョージ ·*G*· ジョセフ 垣田 · 大町訳「非ヨーロッパ起源の数学」講談社ブルーバックス *1996*