

ブラーマグプタの不定方程式

SHIMURA Masato
<http://japla.sakura.ne.jp>

2015 年 1 月 22 日

目次

1	ブラーマグプタによる不等式の解法	1
付録 A	連分数のスク립ト	6

1 ブラーマグプタによる不等式の解法

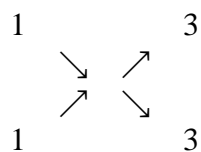
ブラーマグプタ (598-668?) 数理天文学者 インド中西部の都市 Ujjain の天文台長
インド古典時代の業績として、次の 2 次不定方程式が取り扱われた。著書はアラブ語に
訳されて西洋にも伝わる。

$$ax^2 + 1 = y^2$$

の正の整数解を求める。

1.1 完全平方の場合

- $8x^2 + 1 = y^2$ を解け
- ブラーマグプタのアルゴリズム
 1. 最小整数解は $x = 1 \rightarrow y = 3$
 2. クロスに $x = 1, y = 3$ をセットする

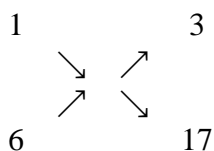


3. 次の x をクロスで求め, 与式に代入して y を求める

$$1 \times 3 + 1 \times 3 = 6$$

$$8 \times 6^2 + 1 = 17^2$$

4. 最小解と次の解の組をセットする

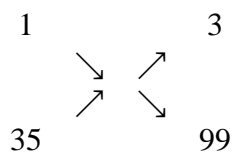


5. クロスして解を求める

$$1 \times 17 + 3 \times 6 = 35$$

$$8 \times 35^2 + 1 = 99^2$$

6. 最小解とその次の解の組をセットする



7. クロスして解を求める

$$1 \times 99 + 3 \times 35 = 204$$

$$8 \times 204^2 + 1 = 557^2$$

● 解の組

$$(1, 3)(6, 17)(35, 99)(204, 557) \cdots$$

1.2 Jのスク립ト

- Jの多項式の定義

$$f(x) = 8x^2 + 1$$

```
f0=: 1 0 8&p.
```

```
f0 1 6 35 204
```

```
9 289 9801 332929
```

```
 %:&f0 1 6 35 204
```

```
3 17 99 577
```

- 完全平方の場合の解法 bg0

```
f0 bg0 1 0 8
```

```
1 3 1
```

```
6 17 1
```

```
35 99 1
```

```
204 577 1
```

```
1189 3363 1
```

```
6930 19601 1
```

```
40391 114243 1
```

```
235416 665857 1
```

右の数は付加数であり、完全平方の場合は1になる

1.3 JのScript

```
f0=: 1 0 8&p. NB. 8x^2 + 1= y^2
```

```
bg0=: 1 : 0
```

```
NB. Usage: f0 bg0 1 0 8 NB. y is repeat times
```

```

mattmp=:matfix=: 1, %: u 1
addnum0=. (u 1)- {: y
ans=. < mattmp,addnum0
for. i. 7 do.
  mattmp=. ans0, ans1=. %: u ans0=+/. * MAT NB. power(+/. *)
  addnum1=. (*: ans1)- ({: y) * *: ans0
  ans=. ans,<mattmp,addnum1
end.
>ans
)

```

1.4 経過と解説

- 関数の定義 $f = 8x^2 + 1 = y^2$
 $f0 =: 1 0 8&p. NB. J$ の係数の順序は $a + bx + cx^2$ となる

```
f0 1
```

```
9
```

- 数式を (左) 引数として用いるように副詞型で作成 $1 : 0$
- 交差の式をマトリクスで組み上げる

```
MAT
```

```
1 3
```

```
1 3
```

- J のプリミティブ Power を用いる

- マトリクス

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- 行列式の値 (determinant) は単項の $-/. * \rightarrow ab - cd$

- power 単項の $+/. * \rightarrow ab + cd$

交差式を足し上げると x の値が求まる

```
-/. * 1 3, :1 3
```

0
+ / . * 1 3, : 1 3

6

5. x を $f0$ に代入すると y^2 が求まる

$f0$ 1 6 35

9 289 9801

6. 最小解と最後の解でクロスマトリクスを構成して、反復する

*1

*1 不完全平方の場合には付加数が 1 ではなく、神業的調整を行って整数ではない解を得ている。スク립トはいずれ挑戦したい。

付録 A 連分数のスク립ト

d	(i.10),. 1 x: (+%)\10\$1x	(i.10),. 2 x: 1 x: (+%)\10\$1x
0	1	0 1 1
1	2	1 2 1
2	3r2	2 3 2
3	5r3	3 5 3
4	8r5	4 8 5
5	13r8	5 13 8
6	21r13	6 21 13
7	34r21	7 34 21
8	55r34	8 55 34
9	89r55	9 89 55

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

$$\frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11} = 3 + \frac{1}{\frac{11}{3}}$$

$$\frac{11}{3} = 3 + \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [3, 3, 1, 2]$$

References

ジョージ・G・ジョセフ 垣田・大町訳「非ヨーロッパ起源の数学」講談社ブルーバックス
1996