JAPLA 研究会資料 2014/12/6

楕円積分、楕円関数をコンピュータ・グラフィックスにより理解する
ー楕円とレムニスケートをめぐる図形と数学ー

西川　利男

１．楕円関数を知っていますか

「楕円とはどんな図形か」、は誰でも知っている。しかし、「楕円関数とは」と聞かれると、大抵の人はさて、となる。理工科出身で知っているという人でも、数学者でない限り、雲の上のありがたいお経のようなもので昔習った気がするが、となる。しかし、楕円関数は数学者の独占物という理工学者の呪縛から脱したいものである。

楕円関数についてどういうものかを知ることと、式をいじったり、値を計算することとは別ものである。三角関数の値が欲しいときは、昔は数表、今では関数電卓である。$\sqrt{2}$ も電卓で一発だがその値をどう求めるかなど知ろうとする人などいない。

楕円関数を知って、使うことは理工学者として大切な素養だが、私としては式で理解する代わりに、グラフィックスなどを通して、そのイメージを文学的に理解することにした。

２．振り子から始める楕円関数まで

実は、私が楕円関数について知る必要に迫られたのは今年１０月に行われた日本技術史教育学会（豊橋技術科学大学）での以下の講演発表がきっかけである。[1]

「カオス（非線形現象）をもっと身近に
　ーローレンツ・カオスの 3D グラフィックス」

ごく普通の振り子の運動について振れ幅がごくわずかなときに限り、その周期は有名な次の式で表せる。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

しかし、ふつうの振れ幅ではこの式は楕円関数が入ったものものしい式になる。

さらに振れ幅が大きくなれば、振り子はぐるぐると回転してしまう。

また、２つの振り子をつないだ２重振り子の運動は予測がつかない。運動はカオスとなる。[2]

楕円関数とは右図に示すようなものである。

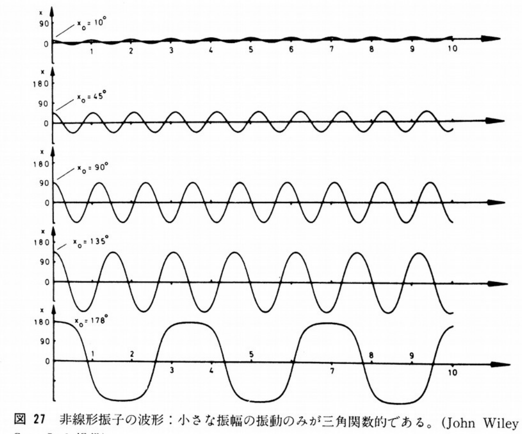


図 27　非線形振子の波形：小さな振幅の振動のみが三角関数的である。(John Wiley & Sons Ltd. 提供)

[1] 西川利男「カオス（非線形現象）をもっと身近にーローレンツ・カオスの 3D グラフィックス」日本技術史教育学会（豊橋）(2014).
[2] イアン・スチュアート著、須田不二夫・三村和男訳「カオス的世界像ー神はサイコロ遊びをするか？」白揚社(1993).

３．楕円積分と楕円関数とは

楕円というのは円が引き伸ばされた、あるいは押しつぶされた図形であるが、古くからBC200頃ギリシャの数学者アポロニウスにより、円錐の切り口に現れる円錐曲線の１つとして知られていた。

楕円を描くには、紙に画鋲などで２つの点を固定し、その周りに輪にした糸に鉛筆を付けてぐるっと描くと簡単に描ける。つまり、楕円とは２つの点からの距離の和が一定な点の軌跡である。この兄弟分として、２点からの距離の積が一定な点の軌跡はレムニスケートという図形になる。

数学書をひもといてみると、楕円積分、楕円関数にはたくさんの式があげてある。もちろん、インターネットにも多くの記事がのっている。

まず、楕円の周囲の長さを求めることから始まる。これは積分の教科書で最後の応用例として出てくるが、普通の初等関数としては、積分の原始関数が求められないということで、楕円積分の登場となる。そして次の３種類の楕円積分が定義される。

・第１種楕円積分　$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\quad F(x,k)=\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

・第２種楕円積分　$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi,\quad E(x,k)=\int_0^{x}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx$

・第３種楕円積分

$$\Pi(\phi,k,\nu)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{(1+\nu\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

$$\Pi(x,k,\nu)=\int_0^{x}\frac{dx}{(1+\nu x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ここで、第１種楕円積分はレムニスケートの弧長、第２種楕円積分は楕円の弧長に対応する。また、φ が π/2までのとき、特に第１種完全楕円積分、第２種完全楕円積分という。　この後、楕円関数となるがこれは第１種楕円積分から出てくる、つまり楕円関数はレムニスケートの弧長に関係するのである。実は私自身、楕円関数とは楕円の周囲の長さに関係するのかと勘違いし、無駄なわき道で時間をつぶしてしまった。

楕円関数に行くためには、いろいろな値の定義や式の置き換え、さらに逆関数とかいろいろ出てきて、それを追って行くと頭の中はゴチャゴチャに混乱する。

[1]　西川利男「カオス（非線形現象）をもっと身近にーローレンツ・カオスの3Dグラフィックス」日本技術史教育学会（豊橋）(2014).
[2]　イアン・スチュアート著、須田不二夫・三村和男訳「カオス的世界像ー神はサイコロ遊びをするか？」白揚社(1993).

４．楕円積分、楕円関数はなぜ分かり難いのかー私の攻略法

この際だから、楕円積分、楕円関数など数学の本はなぜ分かり難いのか、私なりに考えてみた。

物理、機械、電気など理工学者にとっては、楕円積分、楕円関数などをツールとして利用したいのである。そのためには、楕円やレムニスケートの図形とどう対応しているのかを知りたいのである。

ところが、数学者にとっては、楕円やレムニスケートをスタートとするものの、そこから派生した数式の展開に興味があるのである。つまり、数式表現のエレガントさを彼らは愛するのである。例えば、楕円関数は三角関数のような周期関数であるが、２重周期性を持ったり、三角関数と同様な加法定理が成り立ったり、…ということに

価値観を見出すのだろう。これは、このような分野を開拓したJacobi，Legendre，Abel，Gaussという人々が数学者であることから、当然なのかもしれない。

ひるがえって、理工学に身を置くひとりとして、楕円積分、楕円関数の理解へのしかたとして、私は次のように、実用的あるいは文学的(？)な攻略で行った。

このとき、紙と鉛筆、コンパスや分度器に加えて、現在のコンピュータの力を最大限、活用する。Ｊのグラフィックスはもちろんだが、友田勝久氏の開発されたグラフソフトGRAPESが極めて有用であった。[3][4]

[3] 友田勝久「関数グラフソフトGRAPESパーフェクトガイド」文英堂(2007).
[4] 友田勝久、堀部和経「パソコンらくらく高校数学、図形と方程式」講談社ブルーバックス(2005).

つまり、非常に初歩的な方法だが、まず楕円やレムニスケートを、最も素朴な定義に従いコンピュータの図形として描き、その周囲の曲線を直接、巻尺などで測る。

こんどは、コンピュータ利用の方法だが、画面上に図形を描き、その曲線をマウスでトレースすることにより、その長さを知る。このためにＪのプログラムを作った。

このような実験で得た値を数学公式集などの数表の楕円積分の値と突合せ、確認する。このような楕円積分の勉強をした後、おもむろに楕円関数へと進んでいく。

５．楕円と第２種楕円積分[5]

楕円関数への道にとっては、楕円は単なる道筋の花にすぎないが、一応の知識を得ておく。楕円とは２つの点からの距離の和が一定な点の軌跡である。

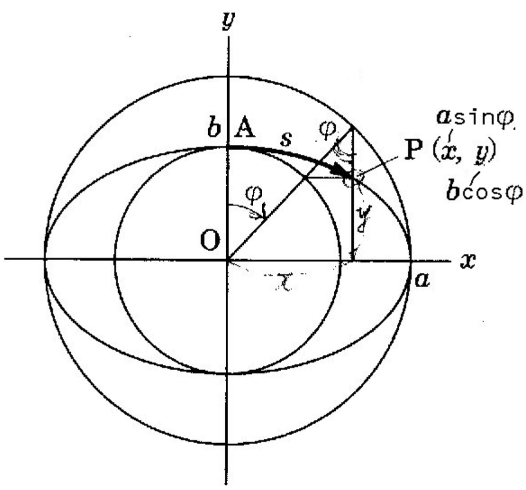
楕円の大きさと形を決めるものは、

・長径(a)と短径(b)

またはp

・焦点($-p$，p)と離心率(k)

とである。



両者の間の関係は

$$k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

このとき、$k=\sin\theta$ として

$k^2=0$、$\theta=0°$ では円、

$k^2=0.5$、$\theta=45°$ では短径：長径＝1：$\sqrt{2}$ のきれいな楕円、

$k^2\to1$ にしたがい楕円はｘ方向に伸びて平べたくなる。

ｙ方向に伸びた楕円はここでは考えていない。

上の図のように角度 ϕ をとるとき（ふつうの角度の取り方とちがう）、楕円の短軸上の点Ａからの弧長 s と長径 a との比（s/a）が第２種楕円積分の値であり

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi,\quad E(x,k)=\int_0^{x}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx$$

その数値は、たとえば岩波の数学公式の数表で次のように与えられている。
角度 $\phi=90°$ のときには、特に第２種の完全楕円積分と呼ばれる。

[5] 戸田盛和「楕円関数入門」p.1-12，日本評論社(2001).

2° 第2種楕円積分 $\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi$ 〔$k=\sin\theta$〕

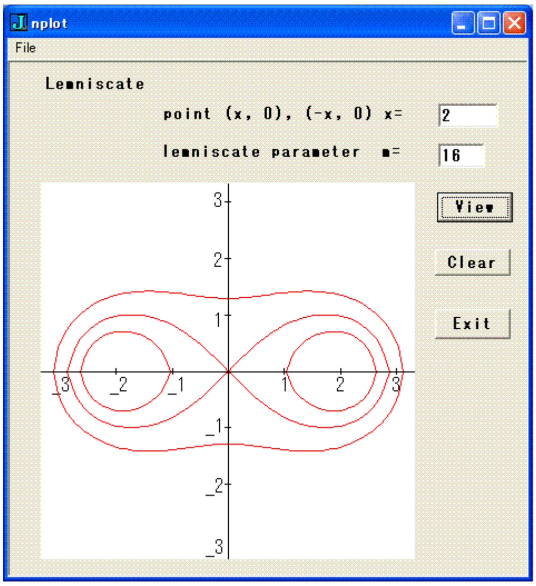
φ \ θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10°	0.17453	0.17447	0.17431	0.17409	0.17387	0.17371	0.17365
20°	0.34907	0.34860	0.34733	0.34558	0.34381	0.34250	0.34202
30°	0.52360	0.52208	0.51788	0.51205	0.50609	0.50165	0.50000
40°	0.69813	0.69467	0.68506	0.67153	0.65746	0.64679	0.64279
50°	0.87266	0.86626	0.84832	0.82265	0.79538	0.77414	0.76604
60°	1.04720	1.03683	1.00756	0.96495	0.91839	0.88080	0.86603
70°	1.22173	1.20650	1.16318	1.09901	1.02664	0.96519	0.93969
80°	1.39626	1.37550	1.31606	1.22661	1.12249	1.02823	0.98481
90°	1.57080	1.54415	1.46746	1.35064	1.21106	1.07641	1.00000

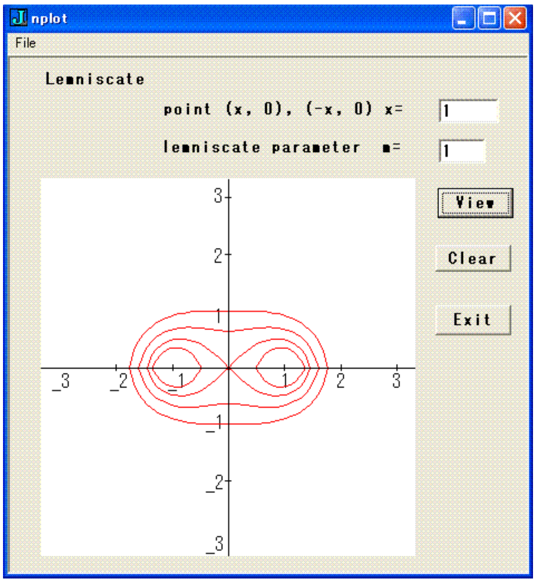
6．レムニスケートと第１種楕円積分[5]

楕円に対して、２点からの距離の積が一定な点の軌跡はレムニスケートというが、これだけの制約では、楕円の場合と違っていろいろな図形があらわれる。

(1) いろいろなレムニスケートなる図形について調べる[6],[7]

すでに私が報告したレムニスケート図形のグラフィックスについて見てみる。





[6]　西川利男「Jグラフィックスによる一般のレムニスケートなる図形」
JAPLA研究会資料 2008/2/23
[7]　W. Gellert et al ed. "Encyclopedia of Math.", p.438, Van Nostrand (1988).

一般に２つの点を基準にして、それからの距離の積が一定の点の軌跡を広義のレムニスケートと言う。これらは基準の２つの点の間の距離とレムニスケートのパラメータとなる積の値によって、いろいろな図形が出来上がる。

グラフィックスから分かるように、左図では、２つの点が(2, 0)と(-2, 0)で積の値が16のときに、右図では、(1, 0)と(-1, 0)で積１のときに、ふつうよく見る ∞ の形の狭義のレムニスケートになりこれはBernouliのレムニスケートと呼ばれる。

左図では積32のとき、右図では積2ときは繭(まゆ)のような形で、Cassinoの卵形と言う。また、積の値が小さくなると、∞ の形はくずれて、２つのゆがんだ円になる。

(2) Ｊのグラフィックス図形で測定し、計算して、数表の値で確かめる。

先にあげたように、Ｊのグラフィックス、あるいはGRAPESシステムなどで、レムニスケート図形を描き、直接あるいはマウスを使って曲線をトレースし、長さを求める。

(3) あらためて、数学の本をひもとく。

たくさんの楕円関数、楕円積分の本があるが、いろいろな式や定義があまりに細かすぎて、これを追って行くのは大変なことだ。かえって、その昔の高木貞治先生の「解析概論」にレムニスケートのていねいな解説があり、役にたった。[8]

[8] 高木貞治「解析概論, 改訂第３版」p.136, 岩波書店(1986).

(4) 図形の定義からレムニスケートの式を導く。

以下、文献[4] "Encyclopedia of Math.", p.438にしたがって、式を進めていく。

まず、基準となる２点を $(-e, 0)$ と $(e, 0)$ とする。
そして、レムニスケートの条件
「満足する点は基準となる２点からの距離の積が一定である」
という性質から

$$r_1 = (x-e)^2 + y^2, \quad r_2 = (x+e)^2 + y^2$$

$$r_1\, r_2 = a^2$$

これらを、整理すると、広義のレムニスケートの式が得られる。

$$(x^2+y^2)^2 - 2\,e^2\,(x^2-y^2) = a^4 - e^4 \quad \cdots\cdot (1)$$

これを極座標

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

で表すと次の式となる。

$$r^2 = e^2\cos 2\theta \pm \sqrt{e^4\cos^2 2\theta + a^4 - e^4} \quad \cdots\cdot (2)$$

ここで

$$a = e$$

のときは、狭義のレムニスケートの式となる。

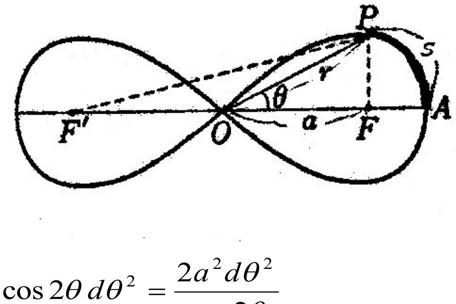
$$(x^2+y^2)^2 = 2\,a^2\,(x^2-y^2) \quad \cdots\cdot (3)$$

極座標では

$$r^2 = 2\,a^2\cos 2\theta$$

すなわち

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta} \quad \cdots\cdot (4)$$



これは、高木貞治の書[8]の式に一致する。以下は同書にしたがって、右図で弧の長さ s を求める。

弧の長さ s の微小部分については

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = \left(\frac{-\sqrt{2}a\sin 2\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2 + 2a^2\cos 2\theta\, d\theta^2 = \frac{2a^2 d\theta^2}{\cos 2\theta}$$

したがって、点Aから点Pまでの弧の長さ s は

$$s = \sqrt{2}a\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \sqrt{2}a\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}, \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right)$$

ここで、角の変動範囲を $\theta, (0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4})$ から φ, $(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2})$ に変える。

$$\varphi = \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi, \quad \cos\theta = \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}$$

故に、つぎのようになる。

$$s = a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

このとき、　弧の長さ s と基準点の長さ a との比 s/a が第１種楕円積分となる。

$$\frac{s}{a} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

つぎに、岩波の数学公式のの数表の値を見てみよう。ここでは、第１種楕円積分の値は次のように示される。

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k = \sin\theta$$

1°　第１種楕円積分　$\displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ 〔$k = \sin\theta$〕

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
φ ＼ k^2	0	0.067	0.25	0.5	0.75	0.933	1
0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	0.1745	0.1746	0.1748	0.1750	0.1752	0.1754	0.1754
20°	0.3491	0.3495	0.3508	0.3526	0.3545	0.3559	0.3564
30°	0.5236	0.5251	0.5294	0.5356	0.5422	0.5474	0.5493
40°	0.6981	0.7016	0.7116	0.7267	0.7436	0.7575	0.7629
50°	0.8727	0.8792	0.8982	0.9283	0.9647	0.9971	1.0107
60°	1.0472	1.0577	1.0896	1.1424	1.2125	1.2837	1.3170
70°	1.2217	1.2373	1.2853	1.3697	1.4944	1.6468	1.7354
80°	1.3963	1.4175	1.4846	1.6085	1.8125	2.1339	2.4362
90°	1.5708	1.5981	1.6858	1.8541	2.1565	2.7681	∞

つまり、∞の形になる狭義のレムニスケートの弧長は、上の数表において $k^2 = 0.5$ のタテのらんの値によって示される。

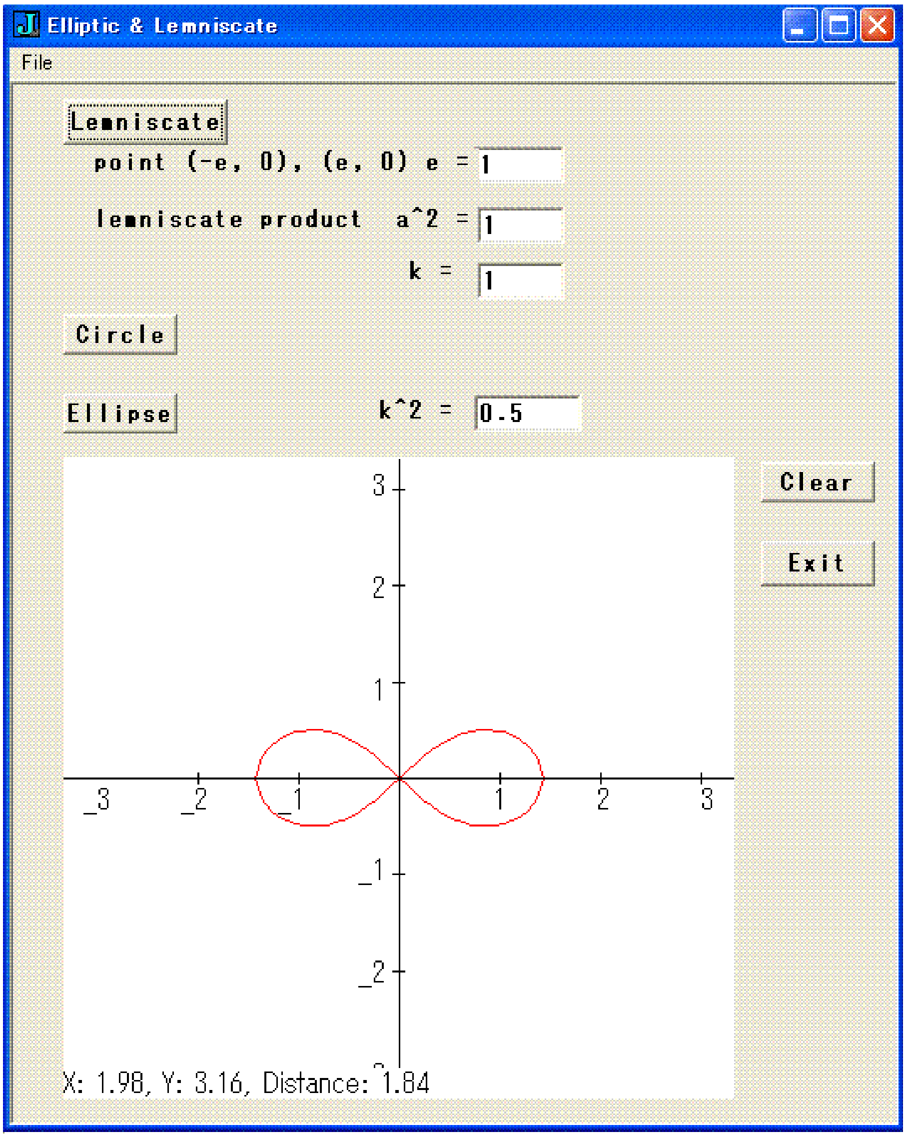
７．J-レムニスケート・グラフィックスによる実験

レムニスケートや楕円を実験的に理解を深めるため、Ｊのグラフィックスにより、実験するツールを作った。

まず、レムニスケートや楕円のいろいろなパラメータを変えた図を生成する。そして、その図の曲線の上を、マウスを押しながらトレースする。このとき、トレースした曲線の距離を、自動的に計測するシステムである。

例のように、パラメータを決めて、実験した結果は 1.84 と計測された。これは、第一種楕円積分の表の値、1.8541 に相当するものである。

パラメータを変えて、いろいろ実験することができる。なお、楕円や円の図形にも対応するようにした。　Ｊのプログラムは最後に示してある。



最後に、今回は楕円積分どまりで楕円関数まで進めることが出来なかった。いままでの理解をバックグラウンドとして、機会をあらためて、楕円関数まで考察して行きたいと思う。

付録　レムニスケート・グラフィックス実験ツーループログラムリスト

```
NB. Lemniscate Graphics / lemniscate.ijs
NB.   by T.Nishikawa 2008/2/13
NB.   measure the curve by tracing with mouse 2014/10/12

NB. Lemniscate Solution
lemni =: 3 : 0"0
:
x =. y.
m =. x.   NB. m:product constant, p:focus point
p =. P
r =. (-x^2) + (-p^2) + %: (4 * (p*x)^2) + m
NB. r =. (-x^2) + _4 + %: (16 * x^2) + m
if. r >: 0 do. %: r else. 0 end.
)

require 'isigraph'
require 'gl2'

NPLOT=: 0 : 0
pc nplot;pn "Elliptic & Lemniscate";
menupop "File";
menu new "&New" "" "" "";
menu open "&Open" "" "" "";
menusep ;
menu exit "&Exit" "" "" "";
menupopz;
xywh 15 4 49 12;cc ok button;cn "Lemniscate";
xywh 223 121 34 12;cc cancel button;cn "Exit";
xywh 15 99 200 170;cc nplgrah isigraph;
xywh 138 32 27 11;cc mval edit ws_border es_autohscroll;
xywh 137 16 28 11;cc pval edit ws_border es_autohscroll;
xywh 24 17 115 10;cc label static;cn "point (-e, 0), (e, 0) e =";
xywh 24 32 114 10;cc label static;cn "lemniscate product  a^2 =";
xywh 223 100 34 11;cc Clear button;
xywh 15 61 34 11;cc Circle button;
xywh 15 82 34 11;cc Ellipse button;
xywh 109 83 25 10;cc label static;cn "k^2 =";
xywh 137 82 33 11;cc k2val edit ws_border es_autohscroll;
xywh 138 47 27 11;cc kval edit ws_border es_autohscroll;
xywh 118 46 17 10;cc kv static;cn "k =";
pas 6 6;pcenter;
rem form end;
)
```

```
run =: nplot_run
nplot_run=: 3 : 0
wd NPLOT
NB. initialize form here
grid ''
M =: 16
wd 'set mval 16'
P =: 2
wd 'set pval 2'
K =: M % (P^4)
wd 'set kval ', (": K)
K2 =: 0.5
wd 'set k2val 0.5'
wd 'pshow;'
)

nplot_close=: 3 : 0
wd'pclose'
)

nplot_cancel_button=: 3 : 0
nplot_close''
)

nplot_exit_button=: 3 : 0
nplot_close''
)

require 'numeric trig'

XX =: steps _4 4 100

val2pixel =: 3 : 0
500 + 150 * y.
)

NB. draw lemniscate ====================================
nplot_ok_button=: 3 : 0
NB. TEST =: 2 1 2 _1
NB. gllines val2pixel TEST
glrgb 255, 0, 0
glpen 2, 0
Y_P =. M lemni XX
XY_P =. XX,.Y_P
```

```
XYP =. >. val2pixel , XY_P
gllines XYP
Y_M =. - M lemni XX
XY_M =. XX,.Y_M
XYM =. >. val2pixel , XY_M
gllines XYM
grid0 ''
glshow ''
)

nplot_pval_button=: 3 : 0
P =: ". pval
K =: M % (P^4)
wd 'set kval ', (": K)
)

nplot_mval_button=: 3 : 0
M =: ". mval
K =: M % (P^4)
wd 'set kval ', (": K)
)

nplot_kval_button=: 3 : 0
K =: ". kval
M =: K * (P^4)
wd 'set mval ', (": M)
)


nplot_Clear_button=: 3 : 0
glclear ''
grid ''
DIS =: 0
glshow ''
)

NB. axis, grid and numbering
grid =: 3 : 0
glrgb 0 0 0
glpen 1 0
gllines 0, 500, 1000, 500 NB. x-axis
gllines 500, 0, 500, 1000 NB. y-axis
gllines L:0 <"(1) ((50 + 150 * >: i.9),.490) ,. ((50 + 150 * >: i.9),.510)
NB. x-grid
```

```
gllines L:0 <"(1) (490,.(50 + 150 * >: i.9)) ,. (510,.(50 + 150 * >: i.9))
NB. y-grid
gltextxy (490 + 150),  490      NB. numbering on x-axis
gltext '1          2          3'
gltextxy 30, 490
gltext '_3        _2        _1'
gltextxy 460, (500 + 160) NB. numbering on y-axis
gltext '1'
gltextxy 460, (500 + 320)
gltext '2'
gltextxy 460, (500 + 480)
gltext '3'
gltextxy 440, (540 - 160)
gltext '_1'
gltextxy 440, (540 - 320)
gltext '_2'
gltextxy 440, (540 - 480)
gltext '_3'
glshow ''
)

grid0 =: 3 : 0
glrgb 0 0 0
glpen 1 0
gllines 0, 500, 1000, 500 NB. x-axis
gllines 500, 0, 500, 1000 NB. y-axis
glshow ''
)

NB. measure curve by tracing with mouse ================================
mouse2pixel =: 3 : 0
d=. ". sysdata
x=.(0{d) * 1000 % (2{d)
y=.(1{d) * 1000 % (3{d)
x ; y
)

pixel2val =: 3 : 0
(y. - 500) % 150
)

nplot_nplgrah_mbldown=: 3 : 0
'x y' =. mouse2pixel ''
X0 =: pixel2val x
Y0 =: pixel2val y
```

```
gltextalign TA_BOTTOM
gltext 'X:', (5j2":X0), ', Y:', (5j2":Y0)
glshow ''
)

nplot_nplgrah_mmove=: 3 : 0
'x y' =. mouse2pixel ''
X =. pixel2val x
Y =. pixel2val y
gltextalign TA_BOTTOM
gltext 'X:', (5j2":X), ', Y:', (5j2":Y)
glshow ''
)

DIS =: 0

nplot_nplgrah_mblup=: 3 : 0
'x y' =. mouse2pixel ''
X1 =: pixel2val x
Y1 =: pixel2val y
D =. %: +/"(1) *: (X1-X0), (Y1-Y0)
DIS =: DIS + D
gltextalign TA_BOTTOM
gltext 'X:', (5j2":X1), ', Y:', (5j2":Y1), ', Distance:', (5j2":DIS)
glshow ''
)

NB. draw circle 1/4 quadrant ===============================
nplot_Circle_button=: 3 : 0
t =. 5 * i.19
X =. sind t
Y =. cosd t
XY =. , X,. Y
XYP =. >. val2pixel , XY
glrgb 0 255 0
glpen 1 0
gllines XYP
glshow ''
)

NB. draw ellipse 1/4 quadrant ===============================

nplot_Ellipse_button=: 3 : 0
t =. 5 * i.19   NB. 0, 5, 10,.. 90 deg.
Y =. cosd t
```

```
NB. k2 =. 0.5
NB. k2 =. 0.75
NB. k2 =. 0.933
X =. (% %: 1 - K2) * sind t
NB. X =. (%: 2) * sind t
XY =. , X,. Y
XYP =. >. val2pixel , XY
glrgb 0 0 255
glpen 1 0
gllines XYP
glshow ''
)

nplot_k2val_button=: 3 : 0
K2 =: ". k2val
)
```