

Jによる3進法の処理—その1 3進法の基本と大学センター試験の問題を解く

西川 利男

はじめに

今年の大学センター試験(1/21)に、3進数に関するBASICによるプログラミングの問題が出された。問題自身は稿末にあげた。

2進法、16進法についてはコンピュータ・デジタル技術との関連から最近では教科書で取り上げられるようである。しかし、単なる知識ではなく、真に理解するためにはプログラミングも含めて3進法を取り上げたのは非常によかったと思う。

本稿では、センター試験の問題を解きつつ3進法の基本とプログラミングを、さらに3進法を利用したフラクタル・グラフィックスは別稿として述べた。

1. 10進法、60進法、12進法、2進法、8進法、16進法、そして3進法

人類の誕生の歴史以来、月日、季節の変わり、暦などで60進法、12進法が用いられたが、結局、普通の数え方としては10進法が主流となった。

近年、デジタルコンピュータでの機構上の利点から、2進法が使われ、それを便利に扱うものとして8進法、16進法が使われている。

2. 3進法(ternary notation)とは

3進法だろうと、その方式の基本は、別に難しいことはない。素朴に1から順に算え上げて、3になったら、上の桁に上げるだけである。

1	……	1
2	……	2
10	……	3
11	……	4
12	……	5
20	……	6
21	……	7
22	……	8
100	……	9
101	……	10
102	……	11
110	……	12
111	……	13
112	……	14
120	……	15

一般に10進表示の数を3進表示に直すにはどうすればよいか。次のように考える。

- ・与えられた数を3つずつのグループに分けて、半端が出たらこれが最下位の3進数である。もちろん、これは1か2である。半端が出なければ0である。
- ・次には先のグループとしてまとめた数に対して3つずつのグループ分けを行い、

その余り、0, 1, 2 の内のいずれかをとり下から2位の桁とする。

・これをグループがなくなるまで繰り返す。

このように書くとややこしいが、普通は次のように行って、最後の商と余りを列挙すると3進表示が得られる。その手順は何ということもない。

```
3 ) 15 ..... あまり 0
   -----
3 )  5 ..... あまり 2
   -----
    1
```

この考え方 (=アルゴリズム) に基づいて、プログラムを作れば、普通の10進数から3進数への変換は行われる。

大学センター試験では、これをBASICでプログラムすることが問題として出されていた。問題は後述。

なお、問題では、3進法への変換を多項式を使って、プログラムするようになっているが、このように式を与えて行うことには私は同意できない。これでは公式を暗記して、それで計算するのが数学である、とされかねない。式を利用し計算するのは数学ではない。式を作ること、考え出すことが数学である、と私は思う。

ここではBASICではなく、Jにより上のアルゴリズムでプログラミングしてみた。プログラムは後述。

3. Jによる3進数のプログラミング

プログラム tern により 15 の 3 進数表示を行う。途中経過も示す。

```
tern 15
M: 5
T: 0

M: 1
T: 2 0

M: 0
T: 1 2 0
** tern:1 2 0
   逆にプログラム tern_to_dec により、3進数 1 2 0 を 10 進表示に戻す。
   tern_to_dec 1 2 0
15
```

Jではプリミティブ動詞#.#:を用いれば、次のように3進数でもごく手軽に扱える。

例えば15の3進数表示は次のようになる。ここで、左引数は3進数表示の桁数を表す。

```
(3 3 3) #: 15
1 2 0
   また、つぎのようにすれば、桁数を指定せず、自動的に3進数表示が得られる。
   3 #.^:(_1) 15
1 2 0
```

これらをまとめて行う。10 までの 3 進数は次のようになる。

```
N =: i. 11
N
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
(3 3 3) #: N
0 0 0
0 0 1
0 0 2
0 1 0
0 1 1
0 1 2
0 2 0
0 2 1
0 2 2
1 0 0
1 0 1
```

次にセンター試験の問題として出された、3 進の逆転数の問題をやってみた。

```
gyakuten 15
N: 15, T: 1 2 0
gyakuten: 0 2 1
gyakuten 10
N: 10, T: 1 0 1
gyakuten: 1 0 1
```

このように、15 の 3 進数の各桁の数字を逆転すると変わってしまうが、一方、10 の 3 進数の各桁の数字は逆転しても変わらない。これを 3 進の逆転数とよぶことにする。

センター試験の最後の問題として、どういった数が 3 進の逆転数になるか、問われていたが、J では簡単に次のように得られる。100 までの数では以下のようなになる。

```
gyakutensuu 101
0 1 2 4 8 10 13 16 20 23 26 28 40 52 56 68 80 82 91 100
これらの J のプログラム・コーディングは最後に挙げた。
```

4. 終わりに—J と APL における基底の変換

数の基底の変換は、数学で基本の操作である。APL そしてその後継者である J では基本のプリミティブ動詞として備えられている。従って J では 2 進法、8 進法、16 進法の計算は、他の言語と異なりプログラムを組むことなく、ごく簡単に行える。

もっと日常の例では時刻の時分秒の変換は次のように簡単である。

```
24 60 60 #: 10000
2 46 40
10000 秒は 2 時間 46 分 40 秒である。
```

Jのプログラム・リスト

```
tfd =: 3 : '3 #. ^:_1) y' NB. ternary from decimal
dft =: 3 : '3 #. y' NB. decimal from ternary
```

NB. decimal to ternary =====

NB. tern 50 => 1 2 1 2

```
tern =: 3 : 0
```

```
N =. y
```

```
M =. N
```

```
T =. ''
```

```
i =. 0
```

```
while. i < (3 ^ . N) NB. repeat while less than log N based on 3
```

```
do.
```

```
wr 'M: ', ": M1 =. <. M % 3 NB. integer divide by 3
```

```
wr 'T: ', ": T =. (3|M), T NB. residue by 3, appended as upper digit
```

```
if. M1 = 0 do. '** tern:', (":T) return. end.
```

```
rd 1
```

```
M =. M1
```

```
i =. i + 1
```

```
end.
```

```
)
```

NB. ternary to decimal =====

NB. tern_to_dec 1 2 1 2 => 50

```
tern_to_dec =: 3 : '+/ y * 3 ^ |. i. #y'
```

NB. gyakuten of ternary notation =====

NB. gyakuten 100

```
NB. 1 0 2 0 1
```

```
NB. 1 0 2 0 1
```

```
NB. 1
```

```
gyakuten =: 3 : 0
```

```
wr 'N: ', (":y), ', T: ', ": T =. 3 #. (^:_1) y
```

```
'gyakuten: ', ": TT =. |. T
```

```
)
```

```
gyaku =: 3 : 0"(0)
```

```
T =. 3 #. (^:_1) y
```

```
TT =. |. T
```

```
T -: TT
```

```
)
```

NB. gyakutensuu 50

```
NB. 0 1 2 4 8 10 13 16 20 23 26 28 40
```

```
gyakutensuu =: 3 : '(gyaku i. y)#(i. y)'
```

大学センター試験問題 数学Ⅱ・数学B 第6問
毎日新聞 (2013年1月21日) から

自然数 N を、0 または 1 または 2 のいずれかの値をとる a_p, a_{p-1}, \dots, a_0 を用いて

$$N = a_{p-1} \times 3^{p-1} + a_{p-2} \times 3^{p-2} + \dots + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3 + a_0 \quad \text{①}$$

と表すとき、数字の列 $a_{p-1}a_{p-2}\dots a_2a_1a_0$ を N の 3 進数表示とよび、 p をこの 3 進数表示の桁数とよぶ。ただし、 a_{p-1} は 0 ではないとする。たとえば

$$35 = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$$

であるから、35 の 3 進数表示は 1022 であり、その桁数は 4 である。また、自然数 1 から 10 の 3 進数表示は以下のようになる。

自然数 N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N の 3 進数表示	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101

3 進数表示が p 桁の自然数 N は $3^{p-1} \leq N < 3^p$ を満たすので、常用対数をとるにより、 p と N の関係式

$$p - 1 \leq \frac{\log_{10} N}{\log_{10} 3} < p \quad \text{②}$$

が成り立つことがわかる。

- (1) 3 進数表示が 1212 である自然数は である。
 (2) 自然数 N を与え、その 3 進数表示を求めよう。① の N を 3^{p-1} で割った商が a_{p-1} であることに着目して、 N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\dots a_2a_1a_0$ を上の位の数から順に出力する〔プログラム 1〕を作成した。また、① の N を 3 で割った余りが a_0 であることに着目して、 N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\dots a_2a_1a_0$ を下の位の数から順に出力する〔プログラム 2〕を作成した。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。また、 $\text{LOG}_{10}(X)$ は X の常用対数を表す関数であり、② により、いずれのプログラムにおいても、110 行は入力された自然数 N または M の 3 進数表示の桁数を P に代入している。

〔プログラム 1〕

```

100 INPUT N
110 LET P=INT(LOG10(N)/LOG10(3))+1
120 LET X=3^(P-1)
130 FOR I=1 TO P
140 PRINT 
150 LET N=
160 LET X=
170 NEXT I
180 END
    
```

〔プログラム 2〕

```

100 INPUT M
110 LET P=INT(LOG10(M)/LOG10(3))+1
120 FOR I=1 TO P
130 PRINT M-INT(M/3)*3
140 LET M=INT(M/3)
150 NEXT I
160 END
    
```

, , に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① $X/3$ ② $N/3$ ③ X/N ④ $\text{INT}(N/3)$ ⑤ $N-\text{INT}(N/3)*3$
 ⑥ $\text{INT}(N/X)$ ⑦ $N-\text{INT}(N/X)$ ⑧ $N-\text{INT}(N/X)*X$

〔プログラム 2〕を実行して変数 M に 77 を入力すると、 $\frac{\log_{10} 77}{\log_{10} 3} = 3.95 \dots$ であることから、110 行では P に 4 が代入される。130 行で出力される値を並べることにより、自然数 77 の 3 進数表示は となる。

- (3) 与えられた自然数 N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\dots a_2a_1a_0$ が、これを逆に並べた数字の列 $a_1a_2\dots a_{p-2}a_{p-1}$ と一致するかどうかを調べ、その結果を出力する〔プログラム 3〕を作成した。たとえば、〔プログラム 3〕を実行して変数 N に 202 を入力すると、202 は 3 進数表示が 21111 であるから「一致しない」と出力される。また、変数 N に 203 を入力すると、203 は 3 進数表示が 21112 であるから「一致する」と出力される。

〔プログラム 3〕

```

100 INPUT N
110 LET P=INT(LOG10(N)/LOG10(3))+1
120 LET X=3^(P-1)
130 
140 FOR I=1 TO INT(P/2)
150 LET A=
160 LET N=
170 LET X=
180 LET B=M-INT(M/3)*3
190 LET M=INT(M/3)
200 
210 NEXT I
220 PRINT "一致する"
230 GOTO 250
240 PRINT "一致しない"
250 END
    
```

〔プログラム 3〕の に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- ① LET M=N ② LET M=P ③ LET M=X
 ④ LET N=M ⑤ LET N=P ⑥ LET N=X

に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① IF A=B THEN GOTO 220 ② IF A<>B THEN GOTO 220
 ③ IF A=B THEN GOTO 240 ④ IF A<>B THEN GOTO 240

〔プログラム 3〕を実行して変数 N に 436 を入力すると、 $\frac{\log_{10} 436}{\log_{10} 3} = 5.53 \dots$ であることから、110 行では P に 6 が代入され、200 行の IF 文の判定は 回実行される。200 行の IF 文の判定が最後に行われたときの X の値は であり、その後、, に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 220 行が実行され、240 行は実行されない
 ② 240 行が実行され、220 行は実行されない
 ③ 220 行と 240 行の両方が実行される
 ④ 220 行と 240 行はいずれも実行されない