山本の数え上げ問題
分割数と分配方法

SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.com
URL:http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue

2012 年 10 月 26 日

目次

はじめに

JAPLA のワークショップで山本洋一氏から次のような問題が提出された。

人が集まって、グループ作業をするときに何種類のグループができるかという問題です

例えば、A,B の 2 人がいてグループを作ったとします。

二人なら、二組 2 種類です。A と B 両方で独立作業をするか、それとも AB が共同作業をするかのどちらかです

それでは 3 人ならどうですか。A,B,C とします。

5 組です。三者独立...(A), (B), (C)

2 者共同 1 者独立...(AB),(C) (A),(BC) (AC),(B)

3 者共同...(ABC)

では一人づつ増やしていけばどうなるか。

0.1　分割数

分割数を補題として数え上げる方法がある。JAPLA のワークショップで分割数は詳しく調べスクリプトも作成した。

4 個のみかん　4 個のみかんを A,B,C の 3 人で分ける方法。方法であり A,B,C は区別しない。次の 3 通りある

- 独り占め...4 0 0 0
- 3 個とって一個あげる...3 1 0 0
- 2 個取って 2 個はあげる
  - ...2 2 0 0
  - ...2 1 1 0
- 平等に分ける....1 1 1 1

0.2　ライプニッツの単純複合

河田直樹 [1] に次の問題と解題がある

5 人から 1 人、2 人、3 人、4 人、5 人を夫々選んでグループ構成員を考えていった場合、全部で何通りのグループができるか考えるもので、ライプニッツはこのグループ全体を「単純複合」と呼んでいる

$$\sum_{r=1}^{n} {}_nC_r = 2^n - 1$$

$${}_5C_1 +_5 C_2 +_5 C_3 +_5 C_4 +_5 C_5 = 2^5 - 1 = 31$$

$2^5 = 32$ であるが、5 人がグループを構成しない場合 (1,1,1,1,1) を除外すると 31 である

```
    >combi 5
1   5
2  10
3  10
4   5
5   1
```

1　分割数を用いた数え上げ

4 個のみかんやライプニッツの問題を分割数をベースに個々人 (A,B,C,D,E など) に配分する場合の配分方法を数え上げる。これは富の配分方法とも考えられる。狩猟社会では獲

物の配分は平等で猟、漁に行かなかった家族へも全家族に平等に配分される。

2　　2 の場合の A,B への配分の方法

分割数		配分の組合せ	
2		2	${}_2C_1$
1	1	1	${}_2C_2$
		3	

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left({}_2C_1\right)\left({}_2C_2\right)$$

3　　3 個の蜜柑の A,B,C への配分方法

分	割	数	配分の組合せ	
3			3	${}_3C_1$
2	1		6	${}_3C_2 \times 2 = {}_3P_1$
1	1	1	1	${}_3C_3$
			10	

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left({}_3C_1\right)\begin{pmatrix}{}_3P_1\\{}_2C_1 \times 3\end{pmatrix}\left({}_3C_3\right)$$

4　　分割数=5

分	割	数		組合せ	
4				4	${}_4C_1$
3	1			12	${}_4C_2 \times 2 = {}_4P_3$
2	2			6	${}_4C_2$
2	1	1		12	${}_4C_3 \times 3 = {}_4P_3$
1	1	1	1	1	${}_4C_4$
				35	

$$\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0&0\\3&0&1&0\\3&0&0&1\\0&3&1&0\\0&3&0&1\\1&3&0&0\\0&0&3&1\\1&0&3&0\\0&1&3&0\\1&0&0&3\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0&0\\2&0&2&0\\2&0&0&2\\0&2&2&0\\0&2&0&2\\0&0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&0\\2&1&0&1\\2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&2&1&0\\1&2&0&1\\1&0&2&1\\0&1&2&1\\1&1&2&0\\1&1&0&2\\1&0&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}{}_4C_1 & = & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}_3C_2 & \times 4 & = & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}_4C_2 & = & & 6\\ ! & 3 & = & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}_3C_2 & \times 4 & = & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}_4C_4 & = & 4\end{pmatrix}$$

5　分割数=7

分	割	数			組合せ	
5					5	${}_5C_1$
4	1				20	${}_5C_2 \times 2 = {}_5P_3$
3	2				20	${}_5C_3 \times 2 = {}_5P_3$
3	1	1			30	${}_5C_2 \times 3$
2	2	1			30	${}_5C_3 \times 3$
2	1	1	1		20	${}_5C_3 \times 2 = {}_5P_3$
1	1	1	1	1	1	${}_5C_5$
					126	

$$
\begin{pmatrix}5&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&5&0&0\\0&0&0&5&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}4&1&0&0&0\\4&0&1&0&0\\4&0&0&1&0\\4&0&0&0&1\\0&4&1&0&0\\0&4&0&1&0\\0&4&0&0&1\\1&4&0&0&0\\0&0&4&1&0\\0&0&4&0&1\\1&0&4&0&0\\0&1&4&0&0\\0&0&0&4&1\\1&0&0&4&0\\0&1&0&4&0\\0&0&1&4&0\\1&0&0&0&4\\0&1&0&0&4\\0&0&1&0&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}3&2&0&0&0\\3&0&2&0&0\\3&0&0&2&0\\3&0&0&0&2\\0&3&2&0&0\\0&3&0&2&0\\0&3&0&0&2\\2&3&0&0&0\\0&0&3&2&0\\0&0&3&0&2\\2&0&3&0&0\\0&2&3&0&0\\0&0&0&3&2\\2&0&0&3&0\\0&2&0&3&0\\0&0&2&3&0\\2&0&0&0&3\\0&2&0&0&3\\0&0&2&0&3\\0&0&0&2&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}3&1&1&0&0\\3&1&0&1&0\\3&1&0&0&1\\3&0&1&1&0\\3&0&1&0&1\\3&0&0&1&1\\0&3&1&1&0\\0&3&1&0&1\\1&3&1&0&0\\0&3&0&1&1\\1&3&0&1&0\\1&3&0&0&1\\0&0&3&1&1\\1&0&3&1&0\\0&1&3&1&0\\1&0&3&0&1\\0&1&3&0&1\\1&1&3&0&0\\1&0&0&3&1\\0&1&0&3&1\\0&0&1&3&1\\1&1&0&3&0\\1&0&1&3&0\\0&1&1&3&0\\1&1&0&0&3\\1&0&1&0&3\\1&0&0&1&3\\0&1&1&0&3\\0&1&0&1&3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}
$$

$$
\left({}_5C_1 \quad = \quad 5\right)\left({}_4C_1 \quad \times 5 \quad = \quad 20\right)\left({}_4C_1 \quad \times 5 \quad = \quad 20\right)\left({}_4C_2 \quad \times 5 \quad = \quad 30\right)
$$

$$
\begin{pmatrix}
2 & 2 & 1 & 0 & 0\\
2 & 2 & 0 & 1 & 0\\
2 & 2 & 0 & 0 & 1\\
2 & 0 & 2 & 1 & 0\\
2 & 0 & 2 & 0 & 1\\
2 & 1 & 2 & 0 & 0\\
2 & 0 & 0 & 2 & 1\\
2 & 1 & 0 & 2 & 0\\
2 & 0 & 1 & 2 & 0\\
2 & 2 & 0 & 0 & 2\\
2 & 0 & 1 & 0 & 2\\
2 & 0 & 0 & 1 & 2\\
0 & 2 & 2 & 1 & 0\\
0 & 2 & 2 & 0 & 1\\
1 & 2 & 2 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & 2 & 1\\
1 & 2 & 0 & 2 & 0\\
0 & 2 & 1 & 2 & 0\\
1 & 2 & 0 & 0 & 2\\
0 & 2 & 1 & 0 & 2\\
0 & 2 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 2 & 2 & 1\\
1 & 0 & 2 & 2 & 0\\
0 & 1 & 2 & 2 & 0\\
1 & 0 & 2 & 0 & 2\\
0 & 1 & 2 & 0 & 2\\
0 & 0 & 2 & 1 & 2\\
1 & 0 & 0 & 2 & 2\\
0 & 1 & 0 & 2 & 2\\
0 & 0 & 1 & 2 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 1 & 1 & 0\\
2 & 1 & 1 & 0 & 1\\
2 & 1 & 0 & 1 & 1\\
2 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 2 & 1 & 1 & 1\\
1 & 2 & 1 & 1 & 0\\
1 & 2 & 1 & 0 & 1\\
1 & 2 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 2 & 1 & 1\\
0 & 1 & 2 & 1 & 1\\
1 & 1 & 2 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 2 & 1\\
1 & 1 & 0 & 2 & 1\\
1 & 0 & 1 & 2 & 1\\
0 & 1 & 1 & 2 & 1\\
1 & 1 & 1 & 2 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 2\\
1 & 1 & 0 & 1 & 2\\
1 & 0 & 1 & 1 & 2\\
0 & 1 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} {}_4C_2 & \times 6 & = & 30 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} {}_4C_3 & \times 5 & = & 20 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} {}_5C_5 & = & 5 \end{pmatrix}
$$

2　数え上げ算のアルゴリズム

2.1　西川のスクリプト

西川は巧妙なスクリプトを作成した (JAPLA 2012 年 6 月)

```
  yaman ("0) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1      0
```

```
 2     3
 3    10
 4    35
 5   126
 6   462
 7  1716
 8  6435
 9 24310
10 92378
```

2.1.1 経過と解説

変換マトリクス　yama

```
   yama ^:(5) ,:1 2
1 2 1 0 0 0 0
0 1 2 1 0 0 0
0 0 1 2 1 0 0
0 0 0 1 2 1 0
0 0 0 0 1 2 1
0 0 0 0 0 1 2
```

マトリクス　逐次１２１のマトリクスを構成する

```
   <"2 yama ^:(i.5)(L:0) ,:1 2
+-----------+-----------+-----------+-----------+-----------+
|1 2        |1 2 1      |1 2 1 0    |1 2 1 0 0  |1 2 1 0 0 0|
|           |0 1 2      |0 1 2 1    |0 1 2 1 0  |0 1 2 1 0 0|
|           |           |0 0 1 2    |0 0 1 2 1  |0 0 1 2 1 0|
|           |           |           |0 0 0 1 2  |0 0 0 1 2 1|
|           |           |           |           |0 0 0 0 1 2|
+-----------+-----------+-----------+-----------+-----------+
```

yama1　ループ (^:i.6) 毎の経過

```
   ,/yama1 ^:(i.6) ,: 1 2
1  2  0   0   0   0   0 NB.(,:1 2)
1  4  5   0   0   0   0
1  6 14  14   0   0   0
1  8 27  48  42   0   0
1 10 44 110 165 132   0
1 12 65 208 429 572 429
```

詳細な経過　経過は次のようになる

```
   ] a0=. 1 2 1,: 0 1 2
1 2 1
0 1 2
    mp=: +/ . *

    1 2 mp a0
1 4 5


] a1=:  (a0,0 0 1),. 0 1 2
1 2 1 0
0 1 2 1
0 0 1 2

    1 4 5 mp a1
1 6 14 14
```

```
   ]a2=. (a1, 0 0 0 1),.0 0 1 2
1 2 1 0 0
0 1 2 1 0
0 0 1 2 1
0 0 0 1 2

   1 6 14 14 mp a2
1 8 27 48 42
```

行の合計　横にたす (ランク 1)

```
   +/"1 ,/yama1 ^:(i.6) ,: 1 2
3 10 35 126 462 1716
```

2.2　Script

```
NB. Yamamoto's sumup Problem
NB. programmed by NISHIKAWA Toshio 2012/7/11
NB. slightly modified by SHIMURA Masato
NB. Usage: * |:  yaman 10
NB. 2  3  4   5   6    7    8     9    10     11
NB. 3 10 35 126 462 1716 6435 24310 92378 352716

yama =: 3 : 0
A =. y
AA =. A,(({.$A)#0), 1
AAA =. AA ,"(1 0) ((<: {.$A)#0), 1, 2
)

yama1 =: 3 : 0
```

```
n =. <: #, y
y +/ . * (yama ^:n) ,:1 2
)

yaman=: 3 : ' (2+i.y),. +/"1,. yama1 ^:(i.y) ,: 1 2'
NB. Usage: yaman 10
```

順列や組み合わせはライプニッツが詳しく検討している。ライプニッツにとっての数学とは神と世の仕組みを理解する方法であった。

順列	$_nP_r = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
	
	$_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
		`   perm 5`
		`1   1`
		`2   5`
		`3  20  NB. 5P3`
		`4  60`
		`5 120`
		
		`perm0 =: 4 : '(!x)%!x - y'`

組合せ	$_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$
	
	$_nC_r \times r! =_n P_r$
	
	$_nC_r = \dfrac{_nP_r}{r!}$
	
	$_nC_r =_n C_{n-r}$
	
	$_nC_r =_{n-1} C_{r-1} +_{n-1} C_r$
		`   3!5`
		`10`
		
		`   > combi 5`
		`1  5`
		`2 10`
		`3 10  NB. 5C3`
		`4  5`
		`5  1`
		
		$_4C_3 =_3 C_2 +_3 C_3$
		
		` (3!4) , (2!3) , (3!3)`
		`4 3 1`

重複組合せ	${}_nH_r ={}_{n+r-1} H_r = \dfrac{(n+r-1)!}{(n-r)!r!}$	${}_4H_3 ={}_{4+3-1} C_3 ={}_6 C_3 = \dfrac{6!}{(6-3)!3!} = 20$

順列を列挙	`tap=: i.@! A. i.`
	NB. Table of all permutations
		`tap 3`
		`0 1 2`
		`0 2 1`
		`1 0 2`
		`1 2 0`
		`2 0 1`
		`2 1 0`

2 項定理		

.1　パスカルの 3 角形

パスカルの 3 角形はこのようにも現れる。${}_4C_3$ は ${}_3C_2$ と ${}_3C_3$ で作れる。${}_nC_r ={}_{n-1} C_{r-1} +{}_{n-1} C_r$ である。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & {}_0C_0 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow & & \\
 & & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & & \\
 & \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow & \\
 & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 & \\
\swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow \\
{}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4
\end{array}$$

```
   (pascal 10), +/ pascal 10
  1 1 1 1  1  1  1   1   1   1
  0 1 2 3  4  5  6   7   8   9
  0 0 1 3  6 10 15  21  28  36
  0 0 0 1  4 10 20  35  56  84
  0 0 0 0  1  5 15  35  70 126
  0 0 0 0  0  1  6  21  56 126
  0 0 0 0  0  0  1   7  28  84
  0 0 0 0  0  0  0   1   8  36
  0 0 0 0  0  0  0   0   1   9
  0 0 0 0  0  0  0   0   0   1
  1 2 4 8 16 32 64 128 256 512   NB. sum
    1 2 3 4   5  6  7    8   9   NB. 2^(n-1)
```

```
pascal=: !/~ & i.
```

- 列の合計は 2^{n-1}

```
   +/ pascal 10
1 2 4 8 16 32 64 128 256 512
```

- 256= +/ 1 9 36 84 126

.2 一度に計算する

纏めて計算するスクリプトを作成する

```
   combi 2 3 4 5 6
+---+---+---+----+----+
|1 2|1 3|1 4|1  5|1  6|
|2 1|2 3|2 6|2 10|2 15|
|   |3 1|3 4|3 10|3 20| NB. nC3
|   |   |4 1|4  5|4 15|
|   |   |   |5  1|5  6|
|   |   |   |    |6  1|
+---+---+---+----+----+
  2   3   4    5   6(r)
```

```
   perm L:0 {@> 3 4 5 6
+---+----+----+-----+
```

```
|1 1|1  1|1   1|1   1|
|2 3|2  4|2   5|2   6|
|3 6|3 12|3  20|3  30|
|   |4 24|4  60|4 120|
|   |    |5 120|5 360|
|   |    |     |6 720|
+---+----+-----+-----+
```

.3 Script

```
perm0=:4 : '(!x)    %  !x - y'
perm1=:3 : '(>:i.y),.; y perm0 L:0 {@> i. y '
NB. Usage: perm 3 4 5 6
perm=: 3 : 'perm1 L:0 {@> y'
NB. usage:tap 3
tap=: i.@! A. i.           NB. Table of all permutations
NB. Usage: combi 3 4 5 6
combi=: 3 : '(>:@ i. L:0{@> y),.L:0 ({@> y)!~ L:0 >:@i. L:0 {@> y'
```

References

[1] 河田 直樹「ライプニッツ 普遍数学への旅」現代数学社 2010