ベジエ曲線とベジエマトリクスフォーム

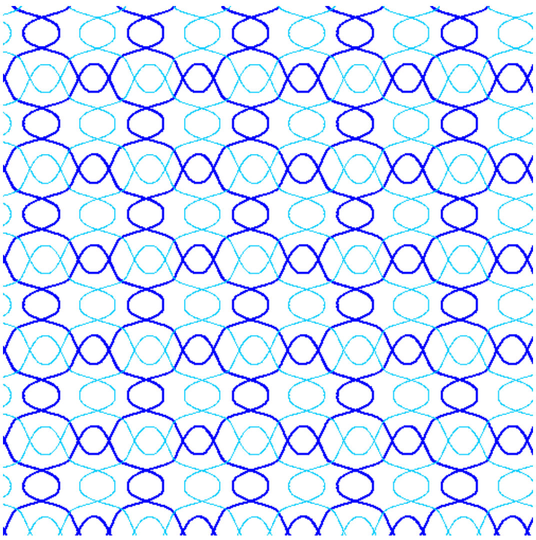
SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.ne.jp

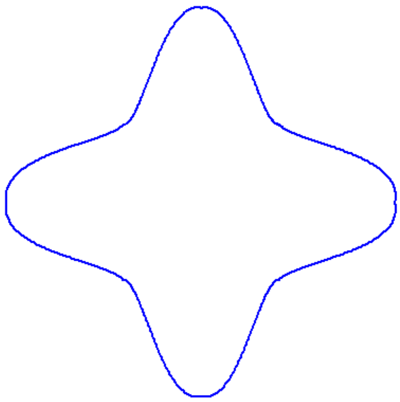
2012 年 9 月 27 日

目次

はじめに

次の左の図は北斎が「新形小紋帳」でデザインしたもので、右のような図を重ねて作成する。数学の幾何曲線では図形は限定されるので、もっと自由に図形を描けるのでフォントのデザインにも用いられ、スプライン曲線は Truetype、ベジエ曲線は Postscript に用いられている。操り人形でいえばスプラインは手繰り、ベジエ曲線は糸繰りの様であるがベジエ曲線のほうが自由度が高いと思われる。





1　ベジエ曲線 (マトリクスフォーム)

スプライン曲線は第 2 次大戦後航空機産業で用いられ始めた。ベジエ曲線はルノー社のドン · カストロ、シトロエン社のベジエが開発したが、長く社外には出なかったようだ。

ベジエ曲線はマトリクスフォームを用いると簡潔に表すことができる。マトリクスフォームを文献 (1) により提示してみよう。

コントロールポイント　4 点からなる。 P_0, P_3 は固定される。

$$ControlPoints : \begin{array}{rl} P_0 = & [x_0, y_0] \\ P_1 = & [x_1, y_1] \\ P_2 = & [x_2, y_2] \\ P_3 = & [x_3, y_3] \end{array}$$

ベルンシュタインの式　.

$$BernsteinCubics : \begin{array}{rc} B_0(t) = & (1-t)^3 \\ B_1(t) = & 3(1-t)^2 t \\ B_2(t) = & 3(1-t)t^2 \\ B_3(t) = & t^3 \end{array}$$

ベジエの公式の導出　.

$$Besier(t) = B_0(t)P_0 + B_1(t)P_1 + B_2(t)P_2 + B_3(t)P_3$$

$$Besier(t) = (1-t)^3[x_0, y_0] + 3(1-t)^2 t[x_1, y_1] + 3(1-t)t^2[x_2, y_2] + t^3[x_3, y_3]$$

$$Besier(t) = [x(t), y(t)]$$

$$x(t) = x_3 t^3 + 3x_2 t^2 - 3x_2 t^3 + 3x_1 t - 6x_1 t^2 + 3x_1 t^3 + 3x_0 - 3x_0 t + 3x_0 t^2 - x_0 t^3$$

$$x(t) = x_0 + (-3x_1 + 3x_2)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3$$

ベジエのマトリクスフォーム　.

$$BesierMatrixForm : \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -3x_0 + 3x_1 \\ 3x_0 - 6x_1 + 3x_2 \\ -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

$$y(t) = y_3 t^3 + 3y_2 t^2 - 3y_2 t^3 + 3y_1 t - 6y_1 t^2 + 3y_1 t^3 + 3y_0 - 3y_0 t + 3y_0 t^2 - y_0 t^3$$

$$y(t) = y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3$$

$$BesierMatrixForm : \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = AY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ -3y_0 + 3y_1 \\ 3y_0 - 6y_1 + 3y_2 \\ -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3$$

ベジエの多項式と係数 .

$$Besier(t) = [x(t), y(t)] = [c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\ ,\ d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3]$$

1.1 数値例と経過

J で描くからには簡潔なマトリクスフォームで直ちに多項式の係数を得て、p. で多項式の値 (ベジエ曲線) を求め、グラフィックスに渡すようにする

1. Example 1 P_0, P_1, P_2, P_3

```
   L0
x y
0 1
1 2
2 2
3 1
```

2. Besier Matrix

```
   mat_besier
 1  0  0 0
_3  3  0 0
 3 _6  3 0
_1  3 _3 1
```

3. 内積演算 x,y を同時に行う

```
   mat_besier +/ . * L0
x(t),y(t)
0  1
3  3
0 _3
0  0
```

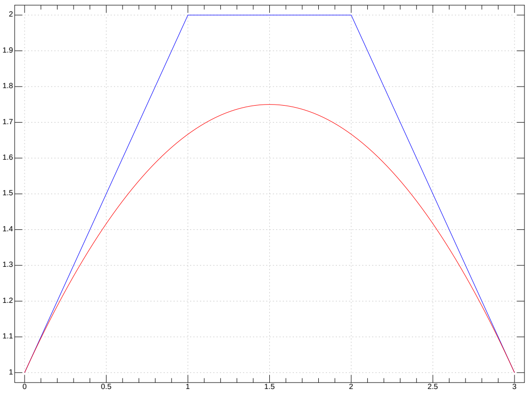
$x(t) = 3t$

$y(t) = 1 + 3t - 3t^2$

4. x(t),y(t) を計算する。

   J の p. を用いる。3 次多項式になる。t は区間を [0,1] として steps で細分する。

```
    (0 0 3 &p. ,. 1 3 _3&p.  )steps 0 1 10
    0    1
0.03 1.27
0.12 1.48
0.27 1.63
0.48 1.72
0.75 1.75
1.08 1.72
1.47 1.63
1.92 1.48
2.43 1.27
   3    1
```

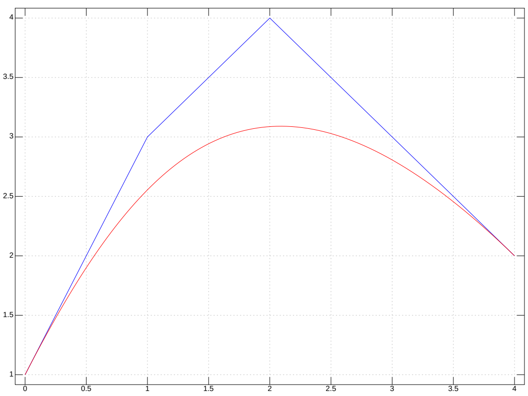


5. Besier 曲線の特色
   - P_0, P_1, P_2, P_3 のうち両端の P_1, P_3 は固定
   - 中間の P_1, P_2 はコントロールポイントとして用いる

コントロールの P_1, P_2 は実例を沢山描き勘で覚える必要がある

- Example 2

```
   L1
0 1
1 3
2 4
4 2

   mat_besier +/ . * L1
0  1
3  6
0 _3
1 _2
```

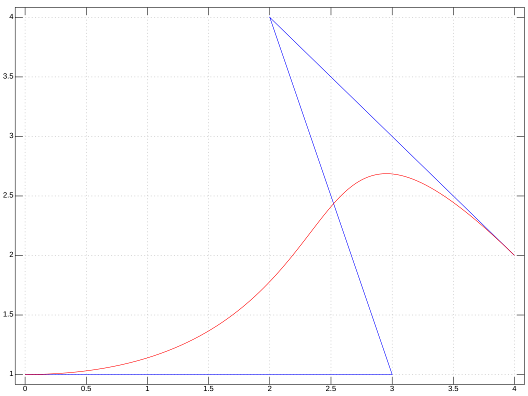


$x(t) = 3t + t^3$

$y(t) = 1 + 6t - 3t^2 - 2t^3$

- Example 3

```
   L2
0 1
3 1
2 4
4 2

   mat_besier +/ . * L2
  0   1
  9   0
_12   9
  7  _8
```

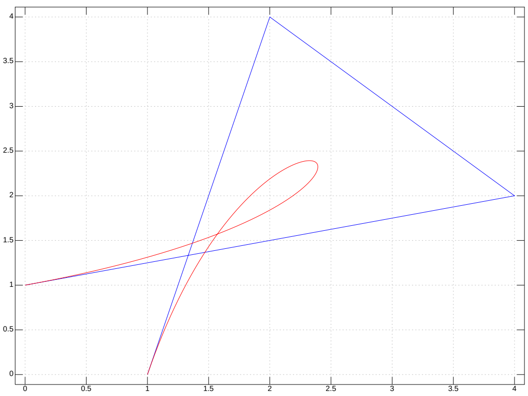


$x(t) = 9t - 12t^2 + 7t^3$

$y(t) = 1 + 9t^2 - 8t^3$

- Example 4

```
   L3
0 1
4 2
2 4
1 0

   mat_besier +/ . * L3
  0   1
 12   3
_18   3
  7  _7
```



$x(t) = 12t - 18t^2 + 7t^3$

$y(t) = 1 + 3t + 3t^3 - 7t^3$

2 小紋の作図データの構成

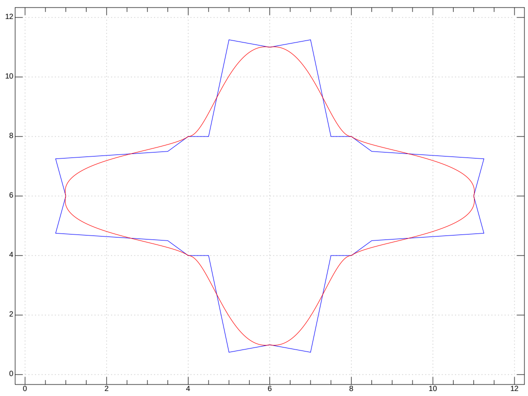
4 ポイントずつのデータを 1 個ずつボックスでオーバーラップさせて構成する。各ボックスのデータの最初と最後の 2 個は固定される。入力はオーバーラップ分は除く 各象限は 7 個ずつのデータで構成される

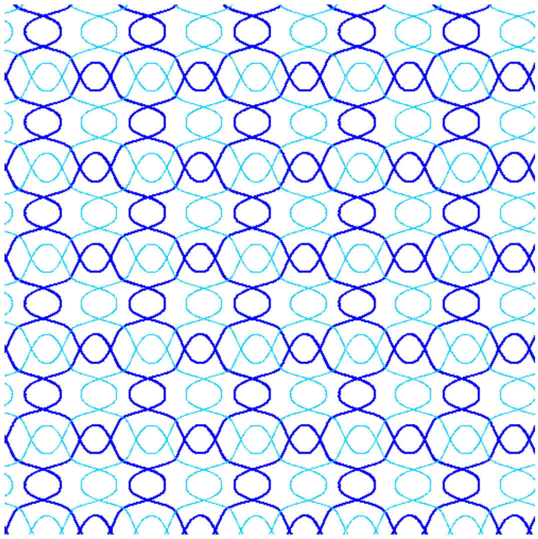
```
DM0=: 1 6,0.75 7.25,3.5 7.5,4 8,4.5 8,5 11.25,:6 11      NB. 7-left upper quarter
DM0=: DM0,7 11.25,7.5 8,8 8,8.5 7.5,11.25 7.25 ,: 11 6  NB. 7-right upper quarter
DM0=: DM0,11.25 4.75, 8.5 4.5,8 4,7.5 4,7 0.75,:6 1     NB. 7-right down
DM0=: DM0,5 0.75,4.5 4,4 4,3.5 4.5,0.75 4.75,: 1 6      NB. 7-left down

 form_besier4  DM0
+---------+---------+---------+----------+----------+--------+--------+---------+
|   1    6|  4     8|  6     11|     8    8|    11     6|  8     4|  6     1|    4    4|
```

```
|0.75 7.25|4.5      8|   7 11.25|   8.5   7.5|11.25 4.75|7.5      4|   5 0.75| 3.5   4.5|
| 3.5   7.5|   5 11.25|7.5      8|11.25 7.25|   8.5   4.5|   7 0.75|4.5      4|0.75 4.75|
|    4      8|   6      11|   8      8|    11      6|      8      4|   6      1|   4      4|    1      6|
+---------+---------+---------+----------+---------+--------+--------+---------+
```

```
draw_dline0  ;"1 calc_besier4 L:0 form_besier4  DM0
```

ベジエの入力 (DM0) と出力





DM0 のデータをボックスに整列する。DM0 はボックスにしたときにオーバーラップするが、入力は 4,3,3、で行う。

```
form_besier4=: 3 : 0
NB. all 4 points only
NB. from each overlaped P(0,1,2,3)
index=. (i.# y) e. 3*i. # y
tmp0=. index <;.1  y
(}: tmp0) , L:0 }. {. L:0 tmp0
)
```

3　ベジエカーブの仕組みと他の次数のベジエ曲線

3.1　マトリクスフォーム

1. Bernstein の公式 (3 次式) からマトリクスの値を求める

$$J_{n,i} = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

$$\begin{array}{rcccc} J_{3,0}(t) = & (1-t)^3 & = & 1-3t+3t^2-t^3 \\ J_{3,1}(t) = & 3t(1-t)^2 & = & 3t-6t^2+3t^3 \\ J_{3,2}(t) = & 3t^2(1-t) & = & 3t^2-3t^3 \\ J_{3,3}(t) = & t^3 & & \end{array}$$

2. ベジエマトリクスフォーム (3 次=4 ポイント)。J 流に構成している

$$BesierMatrixForm : \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = AX = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t^3 & t^2 & t & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -3x_0+3x_1 \\ 3x_0-6x_1+3x_2 \\ -x_0+3x_1-3x_2+x_3 \end{pmatrix}$$

3. ベジエ多項式。J 流に高次の項を右においている

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

4. 数値で確認する

```
   L1
0 1
1 3
2 4
4 2
```

```
   |: mat_besier4 +/ . * L1
0 3  0  1
1 6 _3 _2
```

$$\begin{array}{rc} x(t) = & 3t+t^3 \\ y(t) = & 1+6t-3t^2-2t^3 \end{array}$$

5. t は 0 1 を細かく刻んで作る steps 0 1 100
6. ベジエ多項式に t を与える

```
a=. |: mat_besier4 +/ . * L1
a&p. "1 0 steps 0 1 10
```

p. の両項で多項式にフィットさせる
P0-P3 間を 10 で刻んだ
ランク" 0 で x,y に作用

```
    0     1   NB. P0=fix
0.301 1.568
0.608 2.064
0.927 2.476
1.264 2.792
1.625     3
2.016 3.088
2.443 3.044
2.912 2.856
3.429 2.512
    4     2  NB. P3=fix
```

3.2 Cubic Besier の他の計算法

1. Bernstein の公式の Script

```
b3_0=: (^&3@-.);(3&* * ^&2@-.);(*&3@^&2 * -.);^&3  NB. Bernstein formula
NB.     (1-t)^3  3t(1-t)^2     3t^2(1-t)      t^3
```

J Grammar ベルンシュタイン関数を *4* 項に分離して各項ごとにボックスに入れ、同時計算を行う *tacit* 型関数定義

2. *Bernstein* の公式に *t(= steps 0 1 10)* を投入

```
 ;"1 ,. b3_0 steps 0 1 10
1 0.729 0.512 0.343 0.216 0.125 0.064 0.027 0.008 0.001 0
0 0.243 0.384 0.441 0.432 0.375 0.288 0.189 0.096 0.027 0
0 0.027 0.096 0.189 0.288 0.375 0.432 0.441 0.384 0.243 0
0 0.001 0.008 0.027 0.064 0.125 0.216 0.343 0.512 0.729 1
```

縦の合計は全て *1* になる

3. ベジエ *(3* 次*)* の簡潔な *Script*

```
b3=: 3 : 0
t0=.;"1 ,. b3_0 steps 0 1 10
+/ t0 * "0 1 y
)
```

4. ベジエの *4* ポイント P_0, P_1, P_2, P_3 を当てはめる。マトリクスフォームで計算した場合を右においた。

```
 (b3 EXG),. (|: mat_besier4 +/ . * EXG)&p. "1 0 steps 0 1 10

 analog (b3)    matrix formula
---------------------------------
     3    2.5   3      2.5       NB. P0
3.4785 2.1335   3.4785 2.1335
 4.008  1.908   4.008  1.908
4.5795 1.7845   4.5795 1.7845
 5.184  1.724   5.184  1.724
5.8125 1.6875   5.8125 1.6875
 6.456  1.636   6.456  1.636
7.1055 1.5305   7.1055 1.5305
 7.752  1.332   7.752  1.332
8.3865 1.0015   8.3865 1.0015
     9    0.5   9      0.5       NB. P3
```

5. 長いデータに適用

```
b3_long=: 3 : ';"2,. b3 (L:0) 4 form_besier_all y'
```

3.3　3 ポイント (2 次) のベジエマトリクス

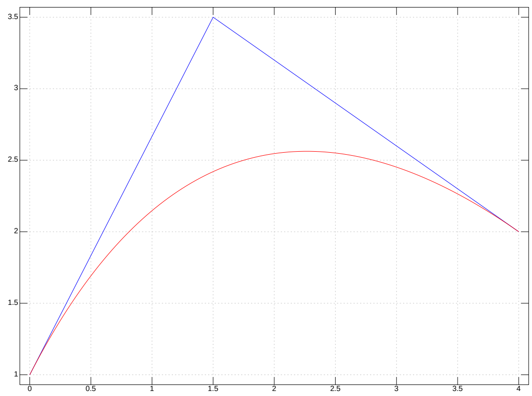
あまり複雑でない図形は 3 次のベジエマトリクスで対応できる。
Berstein の公式から 2 次式を求める

$$
\begin{aligned}
(1-t)^2 &= 1-2t+t^2 \\
2t(1-t) &= 2t-2t^2 \\
t^2 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

```
    mat_besier3
 1  0 0
_2  2 0
 1 _2 1
```

```
3 plot_besier0  0 1,1.5 3.5,: 4 2

  pd 'eps c:/temp/besier_t3.eps'
```



3.4　4 次 (5 ポイント) のベジエ曲線

1. ベルンシュタインの公式

$$
\begin{aligned}
(1-t)^4 &\to 1-4t+6t^2-4t^3+t^4 \\
4t(1-t)^3 &\to 4t-12t^2+12t^3-t^4 \\
6t^2(1-t)^2 &\to 6t^2-12t^3+6t^4 \\
4t^3(1-t) &\to 4t^3-4t^4 \\
t^4 &
\end{aligned}
$$

2. Bernstein Formura を直接に t を先に計算する方法

```
b5_0=: (^&4@-.);(4&* * ^&3@-.);(*&6@^&2 * ^&2@-.);(*&4@^&3  * -. );^&4
          (1-t)^4  4t(1-t)^3     6t^2(1-t)^2          4t^3(1-t)        t^4
```

3. 4 次のマトリクスフォーム

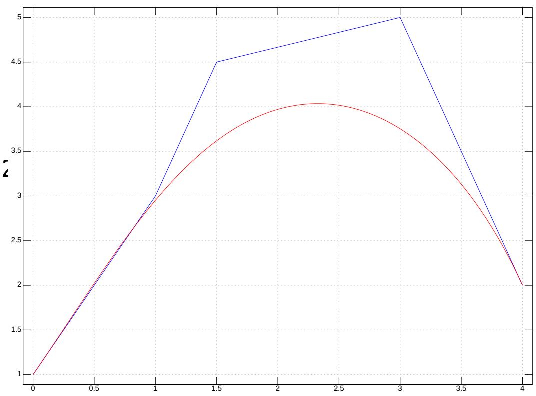
```
mat_besier5
```

```
 1   0   0  0 0
_4   4   0  0 0
 6 _12   6  0 0
_4  12 _12  4 0
 1  _4   6 _4 1
```

4. 2 の方法の比較

```
   (b5 L0,4 0),.  (|: mat_besier5 +/ . * L0, 4 0)&p. "1 0 steps 0 1 10
  0      1   0      1    NB.  P0
0.4 1.3401   0.4 1.3401
0.8 1.5616   0.8 1.5616
1.2 1.6681   1.2 1.6681
1.6 1.6656   1.6 1.6656
  2 1.5625   2   1.5625
2.4 1.3696   2.4 1.3696
2.8 1.1001   2.8 1.1001
3.2 0.7696   3.2 0.7696
3.6 0.3961   3.6 0.3961
  4      0   4      0   NB.  P3
```

```
5 plot_besier0  0 1, 1 3, 1.5 4.5,3 5 ,: 4 2
   pd 'eps c:/temp/besier_t5.eps'
```



3.5　パスカルの 3 角形と加藤の三角錐

パスカルの 3 角形を 3 角錐の各面に貼り付けて、次数毎に輪切りにすると次のような 3 角形が現れる。アマチュアの数学愛好家加藤一郎氏が高校時代に思いついたと言う 3 項展開から導いた「加藤の三角錐」を発表しておられる。これが絶対値でベジエのマトリクスフォームと一致する。赤字はパスカルの 3 角形の表面には出てこない数値で全て 3 方向から吸引引されている。

1 2 2 1 2 1	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $+2ab + 2ac + 2bc$
1 3 3 3 6 3 1 3 3 1	$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ $+3a^2b + 3a^2c + 3ab^2$ $+3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2$ $+6abc$
1 4 4 6 12 6 4 12 12 4 1 4 6 4 1	$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4$ $+4a^3b + 4a^3c + 4ab^3$ $+4b^3c + 4ac^3 + 4bc^3$ $+6a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6b^2c^2$ $+12a^2bc + 12ab^2c + 12abc^2$
1 5 5 10 20 10 10 30 30 10 5 20 30 20 5 1 5 100 10 5 1	$(a+b+c)^4 = a^5 + b^5 + c^5$ $+5a^4b + 5a^4c + 5ab^4$ $+5b^4c + 5ac^4 + 5bc^4$ $+10a^3b^2 + 10a^3c^2 + 10b^3c^2$ $+10b^3c^2 + 10a^2c^3 + 10b^2c^3$ $+20a^3bc + 20ab^3c + 20abc^3$ $+30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 30ab^2c^2$

[*1]

3.6　5 次 (6 ポイント) のベジエ曲線

Bernstein の公式と加藤の三角錐の美しい内部構造が明らかになったところで 5 次のベジエのマトリクスフォームを作成してみよう。

1. ベルンシュタインの公式

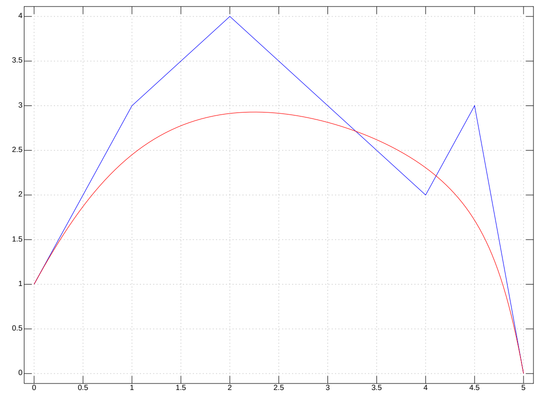
$$
\begin{array}{ccc}
(1-t)^5 & \to & 1-5t+10t^2-10t^3+5t^4-t^5 \\
5t(1-t)^4 & \to & 5t-20t^2+30t^3-20t^4+5t^5 \\
10t^2(1-t)^3 & \to & 10t^2-30t^3+30t^4-10t^5 \\
10t^3(1-t)^2 & \to & 10t^3-20t^4+10t^5 \\
5t^4(1-t) & \to & 5t^4-5t^5 \\
t^5 & &
\end{array}
$$

2. 5 次のマトリクスフォーム

```
   mat_besier6
  1   0   0   0  0 0
 _5   5   0   0  0 0
 10 _20  10   0  0 0
_10  30 _30  10  0 0
  5 _20  30 _20  5 0
 _1   5 _10  10 _5 1
```

3. plot

```
6 plot_besier0  L1,4.5 3,:5 0
   pd 'eps c:/temp/besier6t.eps'
```



[*1] 加藤氏は、4 項定理 $(a+b+c+d)^n$(正 4 面体になる) も展開しておられる。

references

http://kinetigran.com/mck/Calculus/BesierCurves/BesierMatrix.html