

JAPLA 研究会資料 2012/6/16

## Group Theory, Rubik's Cube, OpenGL Graphics and J

Toshio Nishikawa

JAPLA monthly meeting, 16(Sat) May 2012

Statistical Mathematics Institute, Japan  
Tachikawa, Tokyo, Japan

-- (1 of 12) Introduction -----  
日本技術史教育学会 2012/6/23  
Japan Society of Education for History of Technology

技術数学に向けての群論のすすめ

ルービック・キューブで学ぶ群論と  
3D コンピュータ・シミュレーション

Invitation of Group Theory to Mathematics of Technology

Applied to Rubik's Cube 3D Simulation on PC

西川 利男 Toshio Nishikawa

日本 APL 協会 JAPLA

)

-- (2 of 12) Introduction (continued) -----

群論誕生の小史 (Group Theory historical)

2次方程式(quadratic equation)

known already in Oriental Era(2000 B.C.)

3次方程式(cubic equation)

G. Cardano(1501-1576)'s formula

N. Tartalia(1499-1557)

4次方程式(quartic equation)

L. Ferrari(1522-1565)'s formula

5次以上の方程式(more than 5th order equation)

J. L. Lagrange(1736-1813),

A. L. Cauchy(1789-1857),

N. H. Abel(1802-1829),

E. Galois(1811-1832)

"impossible to solve"

群論の誕生 Birth of Group Theory

)

-- (3 of 12) Introduction (continued) -----

現代の群論 Group Theory currently

量子化学、電子状態、スペクトル

quantum chemistry, electronic state, spectroscopy

素粒子物理、クォーク、宇宙論

elementary physics, quark, galaxy

波動関数、分子・原子の対称性

wave equation, molecule and atom: symmetry

Water (H<sub>2</sub>O)      C 2v

Benzene (C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>)    D 6h

F. Albert Cotton:

"Chemical Applications of Group Theory"

John Wiley & Sons (1963).

)

-- (4 of 12) Group Theory and J -----

“群”という考え方と J 言語

Idea of “Group” based on J

動詞 … 関数、 処理、 操作

verb function, procedure, operation

||

群の元(要素)

element of group

名詞 … 値、 データ

noun value, data

||

集合

set

“群”と“集合”とは、はっきり区別しなければならない。

You should not mix up the words, 'Group' and 'Set'.

)

-- (5 of 12) Group Theory and J (continued) -----

群

group

集合

set

四則演算、平方根など

add, mult,.. square\_root

偶数

even number

+, \*, sqrt, ...

2, 4, 6, 8

2 面体群の操作

dihedral operation

回転(60° 120° 180° )、鏡映

rotation, mirror

正 3 角形、正 6 角形

triangle, hexagon

)



-- (8 of 12) Rubik Cube and Group Theory (continued) -----

ルービック・キューブの操作は  $3 \times 3 \times 6 = 54$  個のルービック面小片(Cubelet)の3次元空間内の図形の運動である。

これは何通りあるだろうか？ Jでは次のようにして求められる。

$$((! 8x) * (! 12x) * (3x^8) * (2x^{12})) \% 12x$$

$$43252003274489856000 = 4.325... \times 10^{20}$$

8 個の corner cubelet(3) と 12 個の edge cubelet(2) の組合せの数

群論を用いると、ルービック・キューブの動きは同じ働き

同型写像(Isomorphisms)

を行う置換群の

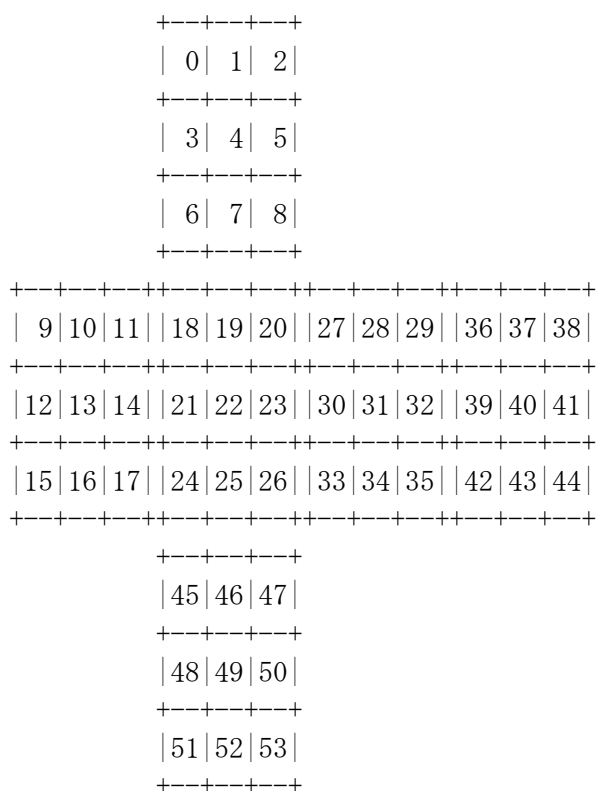
「置換=位置換え(permutation)」

として表現し、処理することができる。

ルービック操作を次のように名付ける。

|                          |             |
|--------------------------|-------------|
| 上面(Up)の反時計まわり(ccw)をu,    | 時計まわり(cw)をU |
| 前面(Front)の反時計まわり(ccw)をf, | 時計まわり(cw)をF |
| 右面(Right)の反時計まわり(ccw)をr, | 時計まわり(cw)をR |
| 左面(Left)の反時計まわり(ccw)をl,  | 時計まわり(cw)をL |
| 下面(Down)の反時計まわり(ccw)をd,  | 時計まわり(cw)をD |
| 裏面(Back)の反時計まわり(ccw)をb,  | 時計まわり(cw)をB |

ルービック面小片(Cubelet)へのインデックスを次のようにする。





-- (9 of 12) Rubik Cube and Group Theory (continued) -----

たとえば、ルービクの前面、反時計(ccw)の回転fは、次の巡回インデックスで示される。

```
f =: (18 20 26 24);(19 23 25 21);(6 27 47 17);(7 30 46 14);(8 33 45 11)
```

これを使って、JのプリミティブC.により巡回置換を行う。

```
f C. RUBJ
UUUUURRRLULLULLUFFFFFFFFFDRRDRRDRRBBBBBBBBBLLLDDDDDD
```

```
display f C. RUBJ
```

```
+----+
|UUU|
|UUU|
|RRR|
+----+----+----+----+
|LLU|FFF|DRR|BBB|
|LLU|FFF|DRR|BBB|
|LLU|FFF|DRR|BBB|
+----+----+----+----+
|LLL|
|DDD|
|DDD|
+----+
```

)

-- (10 of 12) Rubik Cube and Group Theory (continued) -----

もう少し、詳細に見ていこう。

Enter:

```
WRubik '' => Rubik_OPGL.doc
```

)

```
Path =: 2{. 1!:40 ''
```

```
0!:0 < Path,'¥j305¥user¥giju_Rub_Group.js'
```

-- (11 of 12) Rubik Cube and Group Theory (continued) -----

J Rubik システムを実行してみよう。

Enter:

```
run ''
```

)

```
Path =: 2{. 1!:40 ''
```

```
0!:0 < Path,'¥j402¥user¥opgln_rubikj3.ijs'
```



# J-OpenGLによるルービック・キューブの3Dグラフィックス—2 —群論（置換、巡回置換）によるルービック操作とプログラム—

西川 利男

J-OpenGLの3Dグラフィックスを用いたルービック・キューブの動作シミュレーションのプログラムについて、先に報告した [1]。このときはルービックの動きをJで直接コーディングした。しかし、その後、ルービック・キューブの動作は群論のかつこのテーマであることが判り、群論でJを使うため何回かの準備を行った。[2]

また、昨年暮に偶然、まさにルービック・キューブのための群論入門書である D. Joyner, "Adventures in Group Theory: Rubik's Cube" の訳書[3]を見つけた。

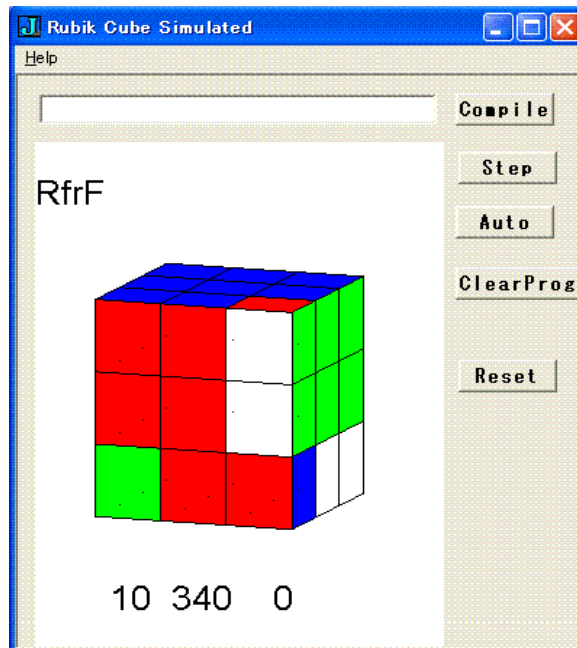
今回はその後の進展をもとに、ルービック・キューブを群論—置換群としての見方で、先のJプログラムを見直し、改良を加えたので、それについて述べる。

## 1. 群論とルービック・キューブ

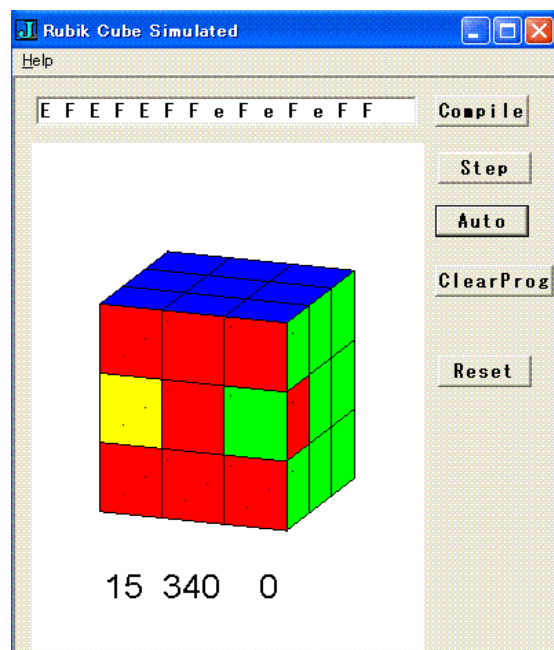
群論とは（数学そのものがそうだが）、図形や構造の運動を考察するのに、同じ挙動を示す(数学的には同形写像 isomorphismと言う) 数式の演算処理を利用する考え方のツールだと言えよう。つまり解析幾何と同じに数式の演算のほうが楽だからである。ルービック・キューブに限らず立体幾何の問題はユークリッドやピタゴラスの天才には易しくても、ふつうの頭には至難のわざである。しかし、現代のコンピュータを使った演算ならわれわれにも可能である。群論はそういう道具なのではないだろうか。

(途中省略)

以下はF面の右下隅の facet をU面の右下隅に移動させる基本ルーチンである。しかし、このとき同時に、その他の多くの facet にも影響を与えている。



次はルービック・マヌーバと呼ばれているすばらしい攻略法[4]である。他に影響を及ぼさずに2箇所だけのfacetの向きを合わせるという操作である。ここでは、入力窓にあらかじめ操作を入れ、Autoボタンを押すと一瞬で実行される。また、Stepボタンではワンステップずつ行う。その結果は以下のとおりである。



## 文献

- [1] 西川利男「J-OpenGLによるルービック・キューブの3Dグラフィックス」  
JAPLA 研究会資料 2011/10/22
- [2] 西川利男「J言語からの群論の理解—その2」 JAPLA 研究会資料 2011/11/26  
「J言語からの群論の理解—その3—直接置換、巡回置換、互換、隣接互換—」  
JAPLA シンポジウム資料 2011/12/10
- [3] D. Joyner, 川辺弘之訳「群論の味わい—置換群で解き明かすルービック・キューブと15パズル」 共立出版(2010).
- [4] 「頭を鍛えるルービックキューブ完全解析！」 宝島社(2007).