

一挙挽回策の勝負手のゲーム

統計数理研究所(名誉教授) 鈴木義一郎

あるギャンブラーが勝率 p で、勝負を n 回続けて行うとする。 i 回目の勝負でのギャンブラーの利得を X_i 、 i 回目までの所持金を S_i とする。

そこで

$$S_{i-1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{i-1}$$

が負にならない限りは

$$X_i = \begin{cases} +1 & (\text{with probability } p) \\ -1 & (\text{with probability } q = 1-p) \end{cases}$$

のように 1 単位金だけを賭ける。しかし S_{i-1} が負になったら

$$X_i = \begin{cases} -S_{i-1} & (\text{with probability } p) \\ S_{i-1} & (\text{with probability } q) \end{cases}$$

のように賭けて、所持金が一挙に 0 になるようにする。これを「一挙挽回策の勝負手のゲーム」と呼ぶことにする。

さらに、長さ $(2h+1)$ の確率ベクトルを次のように定義する。

$$P[h]^t = [P_h(h), P_h(h-1), \dots, P_h(1), P_h(0), P_h(-1), \dots, P_h(-2^{h-1})]$$

さらに、次のような $(2h+3, 2h+1)$ の行列を定義する。

$$A[h] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} P[h+1] & O_1[0] \\ O_2[0] & O[p,0] \end{bmatrix} & \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \\ (h+1) & (2h+3) \end{matrix} \quad B[h] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q \end{bmatrix} \\ (2h+1) \end{matrix}$$

ここで、

$$P[h+1] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix} & \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (h+1) \end{matrix} \\ (h+1) \end{matrix} \quad O[0] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ (h) \end{matrix}$$

$$O[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (h+2) \\ (h+3) \\ \\ (2h+3) \end{matrix}$$

$$O[p,0] = \begin{bmatrix} p & p & \dots & p \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(h+1) (h)

ゲームの定義から

$$P[h+1] = \{A[h] + B[h]\}P[h]$$

といった漸化関係の成立することが確かめられる。

On a stochastic game with one-chance recover (AISM 1980)

<pre> Ah=:4 :0 r=(x*=-/i.a),((a=.y+1),y)\$0 r,(k\$0),y\$x),(a,a+y)\$0) Bh=:4 :'(2,b)\$0),(1-x)*=-/i.b=.1++:y' Ch=:Ah*Bh Ph=:3 :'y,0,-y' </pre>	<pre>]A=:0.6 Ah 1 0.6 0 0 0 0.6 0 0 0 0.6 0 0 0 0 0 0 </pre>	<pre>]B=:0.6 Bh 1 0 0 0 0 0 0 0.4 0 0 0 0.4 0 0 0 0.4 </pre>
---	---	---

<pre>]P1=:Ph 0.6 0.6 0 0.4]P2=:C1 +/ .*P1 0.36 0 0.48 0 0.16]P=(0.4 Ch 1)+/ .*P 0.16 0 0.48 0 0.36 </pre>	<pre>]C2=:0.6 Ch 2 0.6 0 0 0 0 0 0.6 0 0 0 0.4 0 0.6 0 0 0 0.4 0 0.6 0.6 0 0 0.4 0 0 0 0 0 0.4 0 0 0 0 0 0.4 </pre>	<pre>]P3=:C2 +/ .*P2 0.216 0 0.432 0.096 0.192 0 0.064 (0.4 Ch 2)+/ .*P 0.064 0 0.288 0.144 0.288 0 0.216 </pre>
--	--	---

<pre> prob=:4 :0 r=<p=.Ph x [k=.0 while.k<y-1 do.r=.r,<p=(x Ch k=.k+1)+/ .*p end.) </pre>	<pre> >0.6 prob 3 0.6 0 0.4 0 0 0 0 0.36 0 0.48 0 0.16 0 0 0.216 0 0.432 0.096 0.192 0 0.064 >0.4 prob 3 0.4 0 0.6 0 0 0 0 0.16 0 0.48 0 0.36 0 0 0.064 0 0.288 0.144 0.288 0 0.216 </pre>
--	--