複素固有値でのジョルダン分解

Jordan_Block on the Complex Eigen-Values

中野嘉弘 (88歳、札幌市)

FAX 011-588-3354, yoshihiro@river.ocn.ne.jp

J 言語の普及の為の努力の一端である。

0. は し が き

志村氏の報告「非対称行列の固有値を求める」(文献 1) につられて、私も
数年前に、「ジョルダン分解」の報告を書いた(文献 2)。
最近も、Yahoo 知恵袋、数学カテにて、「ジョルダン分解法」についての質問が
出された(文献 3)。ちょっといやらしい問題ですが、参考になれば幸いです。

1. 質問の問題の兄弟行列

元来の質問は 3x3 行列 A = 1 2 2 0 1 2 -1 2 2 であるが、この固有値は
複素数なので、計算は厄介であり、ジョルダンブロックの手順の演習としては不適当
と見た。 質問が出るのも当然であろう。 そこで、私は、僅少の変更をして、

「第 2 行を 0 1 2 -> 0 2 1」として先ず答えて置いた。 固有値は実数となる！

この兄弟行列の解法: その行列を N とする。(負数は _ で示す。)

```
 N=. 3 3 $ 1 2 2  0 2 1  _1 2 2

 1  2  2
 0  2  1
_1  2  2 。
```

1-1) 固有値は LF 法(Leverrier-Faddeev ルヴェーリエ・ファデーエフ)で簡単に

解けて、λ = 1, 2, 2 (2 重根) である。

1-2) 固有ベクトル V(成分 x,y,z) は、行列やベクトル間の内積(inner product)の

演算を ip として (ip =: +/ . * NB. inner product) 、

N ip V = λ* V

即ち、3 次の単位行列を E として、

(N - λ*E) ip V = 0

を、V(x,y,z) についての連立方程式として解けば良い。

1-3） 先ず、λ = 1 の時、

NE1 = (N - 1*E) = 0 と書けば、内容は連立方程式として、

```
 0  2  2        0x + 2y + 2z = 0 ･･･(1)
 0  1  1             0x +  y +  z = 0  ･･･(2)
_1  2  1   から   _1x + 2y + z = 0  ･･･(3)
```

行列式 det NE1 = 0 であるから、この連立方程式は、x=y=z=0 以外の根を持つ。

解法: (1)と (2)は同じことで、y = -z。(3) から x = y。

即ち、z = 1 とすれば、y = x = _1 。

殆ど暗算的だが、解ベクトル V1(x,y,z) =. _1, _1, 1 となる。

1-4） 次の固有値 λ = 2 の時、

NE2 = (N - 2*E) ･･･ = 0 と書けば、内容は連立方程式として、

```
_1  2  2      _1x + 2y + 2z = 0 ･･･(4)
 0  0  1            0x + 0y + z = 0  ･･･(5)
_1  2  0  から  _1x + 2y + 0z = 0 ･･･(6)
```

det NE2 = 0 故、ノン･トリヴィアルな解を持つ。

(5) から z = 0。(6) から x = 2y。

殆ど暗算的だが、解ベクトル V2(x,y,z) =. 2, 1, 0 を得る。

1-5）重複固有値 λ = 2 に対する、もう一つの解 V3 は、次式から求まる。

```
NE2 ip V3 = V2、 _1x + 2y + 2z = 2 ･･･(7)
           0x +  0y + z = 1  ･･･(8)
          _1x + 2y + 0z = 0 ･･･(9)
```

解は、(8) から z = 1、(9) から x = 2y 。

これも、殆ど暗算的だが、解ベクトル V3(x,y,z) =. 2, 1, 1 を得る。

1-6） 解ベクトル V1, V2, V3 を縦列とする行列 P を作る。

```
 ] P =. |: P0 =. 3 3 $ V1, V2, V3
```

```
_1  2  2
_1  1  1
 1  0  1 。
```

その逆行列 IP =. %. P は、

```
 1  _2   0
 2  _3  _1
_1   2   1 。
```

1-7) ジョルダン分解は、次の行列の積

IP ip N ip P

から、

```
 1  0  0
 0  2  1
 0  0  2
```

となる。 結果は、これでよし！

2. 原行列(複素共役固有値) での解

与行列 A は、

A =. 3 3 $ 1 2 2 0 1 2 _1 2 2

```
 1  2  2
 0  1  2
_1  2  2 。
```

2-1) 固有値は LF法(Leverrier-Faddeev ルヴェーリエ・ファデーエフ)で簡単に

λ= _0.658967, 2.32948j0.802255, 2.32948j_0.802255(複素共役根) である。

虚数単位は j で示した。

2-2) 固有ベクトル V(成分 x,y,z) は、行列やベクトル間の内積(inner product)の

演算を ip として (ip =: +/ . *   NB. inner product) 、

A ip V = λ* V

即ち、3次の単位行列を E として、

(A - λ*E) ip V = 0

を、(x,y,z) についての連立方程式として解けば良い。

2-3) 先ず、λ = _0.658967 の時、

AE1 = (A - _0.658967 *E) = 0 と書けば、内容は連立方程式として、

```
1.65897  2      2            1.65897x + 2y + 2z = 0   ・・・(1)
 0   1.65897  2                    0x + 1.65897y +  2z = 0  ・・・(2)
_1      2     2.65897   から   _1x + 2y + 2.65897z = 0  ・・・(3)
```

行列式 det AE1 = 0 と見れるから、この連立方程式は、x=y=z=0 以外の根を持つ。
(2) で z = 1 とすれば y ＝ _1.20557。
(3) から x = 0.247835。
即ち、 最初の解ベクトル V1 は、

V1(x,y,z) =. 0.247835, _1.20557, 1 。

2-4) 次の固有値 λ = 2.32948j_0.802255 の時、

AE2=. A - (2.32948j_0.802255)*E3 として、

```
_1.32948j0.802255            2                    2
       0    _1.32948j0.802255                2
      _1                 2     _0.32948j0.802255
```

AE2 ip V(x,y,z) = 0 の連立方程式を解く。

```
_1.32948j0.802255x      +         2y        +  2z = 0 ･･･(4)
       0x  +  _1.32948j0.802255 y    +  2z = 0 ･･･(5)                2
      _1x +     2y  +  _0.32948j0.802255z  = 0 ･･･(6)
```

det AE2 = 0 と見られるから、この連立方程式は、x=y=z=0 以外の根を持つ。

(4), (5) を 2 で割り、z の項を右辺に移項すれば、 で、z= 1 と置けば、y = 1.10279j0.66546。

```
_0.66474j0.401128x + 1y   = _1z ･･･(4a)
0x  + _0.66474j0.401128y = _1z ･･･(5a)
```

この連立方程式の解は、J 言語的にやれば、

(_1 _1) %. (2 2 $ _0.66474j0.401128 1 0 _0.66474j0.401128) から

1.87608j2.13318 1.10279j0.66546 である故、

V2(x, y, z) = 1.87608j2.13318 1.10279j0.66546 1

である。

2-5)重複固有値 λ = 2.32948j0.802255 に対する、もう一つの解 V3 は、次式

AE3 = A - (2.32948j0.802255) * E3 と置いて、

```
_1.32948j_0.802255            2                  2
      0      _1.32948j_0.802255          2
     _1                  2        _0.32948j_0.802255
```

そして AE3 ip V3 = V2 を解けばよい。

det AE3 = _2.43654 = non zero 故、解はある。

AE3 の逆行列 IAE3 =. %. AE3 は、

```
 107054j224792   53538.5j_272926  38013.3j_384741
15525.2j111815   60478.4j_110653  69063.7j_161111
_34531.8j80555.5  84588.9j_49296    110535j_79393.5。
```

IAE3 ip AE3 は

```
1  0  0
0  1  0
```

0　0　1　　と充分、見れるので、

```
V3 =. IAE3 ip (3 1 $ V2)
```
から、

```
 _2.36849j2.04959
_0.984297j0.925708
_0.474234j0.553256
```
。

2-6) 解ベクトル V1, V2, V3 を縦列とする行列 P を作る。

```
] P =. |: P0 =. 3 3 $ V1, V2, V3

 _2.36849j2.04959  1.87609j2.13318  0.247835
_0.984297j0.925708 1.10279j0.66546 _1.20557
_0.474234j0.553256 1                1
```

det P = _0.537592j3.64271 = non zero　故、その逆行列 IP は、

]IP =. %. P　から

```
 0.0872616j_0.646571    _0.50856j0.522044   _0.634731j0.789603
 _0.489606j_0.354904     0.603074j0.528934     0.84839j0.725624
0.173268j_2.49435e_7  _0.555427j8.45575e_7 0.287452j1.08122e_6
```

（第 3 行の数値の虚部は zero と見なせる。）

2-7) ジョルダン分解は、次の行列の積

```
IP ip A ip P
```

から

```
 2.32948j0.802255      7.09801e_7j5.68154e_6    6.38834e_6j_1.32802e_5
 0.999998j_2.20542e_6     2.32949j_0.802255    _1.22358e_5j_9.83229e_6
5.7592e_7j_1.98382e_6   6.39801e_6j_2.69838e_6   _0.658967j_1.18812e_11
```

見易くする為に、転置して、微少値を cleaning すれば、

```
 2.32948j0.802255    1                    0
 0                 2.32949j_0.802255     0
 0                   0                  _0.658967
```

ジョルダン分解である。

対角要素は、確かに固有値（複素共役数を含む）である。

3.　ま と め

3 年昔には、6 次（実 5 重根）の 行列の Jordan 分解の例を計算した。

今回は、複素数根の場合の ジョルダン分解の計算例が示せた。

文　　献

1） 志村正人「非対称行列の固有値を求める」JAPLA 2008.Jan.24,pp.18

2） 中野嘉弘「固有ベクトル計算、 J と固有値問題（その 10）」JAPLA 報告、2008.Mar.22, pp.12

3） science さん 「行列の計算なんですが、A = 1 2 2　0 1 2　-1 2 2 」

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1058316675