

複素固有値でのジョルダン分解

Jordan_Block on the Complex Eigen-Values

中野嘉弘 (88歳、札幌市)

FAX 011-588-3354, yoshihiro@river.ocn.ne.jp

J 言語の普及の為の努力の一端である。

0. はし が き

志村氏の報告「非対称行列の固有値を求める」(文献1)につられて、私も数年前に、「ジョルダン分解」の報告を書いた(文献2)。
最近も、Yahoo知恵袋、数学カテにて、「ジョルダン分解法」についての質問が出された(文献3)。ちょっといやらしい問題ですが、参考になれば幸いです。

1. 質問の問題の兄弟行列

元来の質問は 3×3 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ であるが、この固有値は複素数なので、計算は厄介であり、ジョルダンブロックの手順の演習としては不相当と見た。質問が出るのも当然であろう。そこで、私は、僅少の変更をして、

「第2行を $0 \ 1 \ 2 \rightarrow 0 \ 2 \ 1$ 」として先ず答えて置いた。固有値は実数となる!

この兄弟行列の解法: その行列を N とする。(負数は $_$ で示す。)

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & _1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ _1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1-1) 固有値は LF法 (Leverrier-Faddeev ルヴェーリエ・ファデーエフ) で簡単に

解けて、 $\lambda = 1, 2, 2$ (2重根) である。

1-2) 固有ベクトル V (成分 x, y, z) は、行列やベクトル間の内積 (inner product) の

演算を ip として ($ip := +/ . * \quad NB. \text{inner product}$)、

$$N \text{ ip } V = \lambda * V$$

即ち、3次の単位行列を E として、

$$(N - \lambda * E) \text{ ip } V = 0$$

を、 $V(x, y, z)$ についての連立方程式として解けば良い。

1-3) 先ず、 $\lambda = 1$ の時、

$NE1 = (N - 1 \cdot E) = 0$ と書けば、内容は連立方程式として、

$$\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ _1 & 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0x + 2y + 2z = 0 \cdots(1) \\ 0x + y + z = 0 \cdots(2) \\ _1x + 2y + z = 0 \cdots(3) \end{array}$$

行列式 $\det NE1 = 0$ であるから、この連立方程式は、 $x=y=z=0$ 以外の根を持つ。

解法: (1)と(2)は同じことで、 $y = -z$ 。(3) から $x = y$ 。

即ち、 $z = 1$ とすれば、 $y = x = _1$ 。

殆ど暗算的だが、解ベクトル $V1(x, y, z) = . _1, _1, 1$ となる。

1-4) 次の固有値 $\lambda = 2$ の時、

$NE2 = (N - 2 \cdot E) \cdots = 0$ と書けば、内容は連立方程式として、

$$\begin{array}{ccc} _1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ _1 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} _1x + 2y + 2z = 0 \cdots(4) \\ 0x + 0y + z = 0 \cdots(5) \\ _1x + 2y + 0z = 0 \cdots(6) \end{array}$$

$\det NE2 = 0$ 故、ノン・トリヴィアルな解を持つ。

(5) から $z = 0$ 。(6) から $x = 2y$ 。

殆ど暗算的だが、解ベクトル $V2(x, y, z) = . 2, 1, 0$ を得る。

1-5) 重複固有値 $\lambda = 2$ に対する、もう一つの解 $V3$ は、次式から求まる。

$$\begin{array}{l} NE2 \text{ ip } V3 = V2, _1x + 2y + 2z = 2 \cdots(7) \\ 0x + 0y + z = 1 \cdots(8) \\ _1x + 2y + 0z = 0 \cdots(9) \end{array}$$

解は、(8) から $z = 1$ 、(9) から $x = 2y$ 。

これも、殆ど暗算的だが、解ベクトル $V3(x, y, z) = . 2, 1, 1$ を得る。

1-6) 解ベクトル $V1, V2, V3$ を縦列とする行列 P を作る。

$$] P = . | : P0 = . 3 \ 3 \ \$ V1, V2, V3$$

$$\begin{array}{ccc} _1 & 2 & 2 \\ _1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} .$$

その逆行列 $IP = . \% . P$ は、

$$\begin{array}{ccc} 1 & _2 & 0 \\ 2 & _3 & _1 \\ _1 & 2 & 1 \end{array} .$$

1-7) ジョルダン分解は、次の行列の積

$$IP \cdot ip \cdot N \cdot ip \cdot P$$

から、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。結果は、これでよし！

2. 原行列(複素共役固有値)での解

与行列 A は、

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & & & & & & \\ -1 & 2 & 2 & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

2-1) 固有値は LF 法 (Leverrier-Faddeev ルヴェーリエ・ファデーエフ) で簡単に

$\lambda = -0.658967, \quad 2.32948j0.802255, \quad 2.32948j-0.802255$ (複素共役根) である。

虚数単位は j で示した。

2-2) 固有ベクトル V (成分 x, y, z) は、行列やベクトル間の内積 (inner product) の

演算を ip として ($ip =: +/ . * \quad NB. \text{inner product}$)、

$$A \cdot ip \cdot V = \lambda * V$$

即ち、3 次の単位行列を E として、

$$(A - \lambda * E) \cdot ip \cdot V = 0$$

を、 (x, y, z) についての連立方程式として解けば良い。

2-3) 先ず、 $\lambda = -0.658967$ の時、

$AE1 = (A - -0.658967 * E) = 0$ と書けば、内容は連立方程式として、

$$1.65897 \quad 2 \quad 2 \quad 1.65897x + 2y + 2z = 0 \quad \dots (1)$$

$$0 \quad 1.65897 \quad 2 \quad 0x + 1.65897y + 2z = 0 \quad \dots (2)$$

$$-1 \quad 2 \quad 2.65897 \quad \text{から} \quad -1x + 2y + 2.65897z = 0 \quad \dots (3)$$

行列式 $\det AE1 = 0$ と見れるから、この連立方程式は、 $x=y=z=0$ 以外の根を持つ。

(2) で $z = 1$ とすれば $y = -1.20557$ 。

(3) から $x = 0.247835$ 。

即ち、最初の解ベクトル $v1$ は、

$$V_1(x, y, z) = 0.247835, -1.20557, 1。$$

2-4) 次の固有値 $\lambda = 2.32948j_0.802255$ の時、

$AE_2 = A - (2.32948j_0.802255) * E_3$ として、

$$\begin{bmatrix} -1.32948j_0.802255 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

AE_2 ip $V(x, y, z) = 0$ の連立方程式を解く。

$$-1.32948j_0.802255x + 2y + 2z = 0 \dots (4)$$

$$0x + -1.32948j_0.802255 y + 2z = 0 \dots (5)$$

$$-1x + 2y + -0.32948j_0.802255z = 0 \dots (6)$$

$\det AE_2 = 0$ と見られるから、この連立方程式は、 $x=y=z=0$ 以外の根を持つ。

(4), (5) を 2 で割り、z の項を右辺に移項すれば、 $z = 1$ と置けば、 $y = 1.10279j_0.66546$ 。

$$-0.66474j_0.401128x + 1y = -1z \dots (4a)$$

$$0x + -0.66474j_0.401128y = -1z \dots (5a)$$

この連立方程式の解は、J 言語的にやれば、

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.32948j_0.802255 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1.87608j_2.13318 \quad 1.10279j_0.66546$ である故、

$$V_2(x, y, z) = 1.87608j_2.13318 \quad 1.10279j_0.66546 \quad 1$$

である。

2-5) 重複固有値 $\lambda = 2.32948j_0.802255$ に対する、もう一つの解 V_3 は、次式

$AE_3 = A - (2.32948j_0.802255) * E_3$ と置いて、

$$\begin{bmatrix} -1.32948j_0.802255 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

そして AE_3 ip $V_3 = V_2$ を解けばよい。

$\det AE_3 = -2.43654 = \text{non zero}$ 故、解はある。

AE_3 の逆行列 $IAE_3 = \dots$ AE_3 は、

$$\begin{bmatrix} 107054j_224792 & 53538.5j_272926 & 38013.3j_384741 \\ 15525.2j_111815 & 60478.4j_110653 & 69063.7j_161111 \\ -34531.8j_80555.5 & 84588.9j_49296 & 110535j_79393.5 \end{bmatrix}$$

IAE_3 ip AE_3 は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

0 0 1 と充分、見れるので、

V3 =. IAE3 ip (3 1 \$ V2) から、

```
_2.36849j2.04959
_0.984297j0.925708
_0.474234j0.553256 。
```

2-6) 解ベクトル V1, V2, V3 を縦列とする行列 P を作る。

] P =. |: P0 =. 3 3 \$ V1, V2, V3

```
_2.36849j2.04959 1.87609j2.13318 0.247835
_0.984297j0.925708 1.10279j0.66546 _1.20557
_0.474234j0.553256 1 1
```

det P = _0.537592j3.64271 = non zero 故、その逆行列 IP は、

] IP =. %. P から

```
0.0872616j_0.646571 _0.50856j0.522044 _0.634731j0.789603
_0.489606j_0.354904 0.603074j0.528934 0.84839j0.725624
0.173268j_2.49435e_7 _0.555427j8.45575e_7 0.287452j1.08122e_6
(第3行の数値の虚部は zero と見なせる。)
```

2-7) ジョルダン分解は、次の行列の積

IP ip A ip P

から

```
2.32948j0.802255 7.09801e_7j5.68154e_6 6.38834e_6j_1.32802e_5
0.999998j_2.20542e_6 2.32949j_0.802255 _1.22358e_5j_9.83229e_6
5.7592e_7j_1.98382e_6 6.39801e_6j_2.69838e_6 _0.658967j_1.18812e_11
```

見易くする為に、転置して、微小値を cleaning すれば、

```
2.32948j0.802255 1 0
0 2.32949j_0.802255 0
0 0 _0.658967
```

ジョルダン分解である。

対角要素は、確かに固有値(複素共役数を含む)である。

3. まとめ

3年昔には、6次(実5重根)の行列の Jordan 分解の例を計算した。

今回は、複素数根の場合の ジョルダン分解の計算例が示せた。

文 献

1) 志村正人「非対称行列の固有値を求める」JAPLA 2008.Jan.24, pp.18

2) 中野嘉弘「固有ベクトル計算、 J と固有値問題(その 10)」JAPLA 報告、
2008.Mar.22, pp.12

3) science さん「行列の計算なんですが、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & \end{pmatrix}$ 」

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1058316675