

素数階乗 (Primorial, Prime Factorial)

幸運数 への 道

中野 嘉弘 (88 歳、札幌市)

FAX 011-588-8877、yoshihiro@river.ocn.ne.jp

は し が き

例の如く、Yahoo 知恵袋・数学カテの新春版に「素数階乗」が登場して、幸運数 (Fortunate number) に繋がるとの話題を見た。面白そうなので、J言語の出番をトライしてみた。発展性は大きいようだ。

1. 素数階乗 とは

ユークリッド数 (Euclid Number) を含め、似たような名前が多いので、困る。

階乗 (Factorial) $!$ は、周知であり、普通の記号では $5! \rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ である。この積を、素数に限定すれば、 $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ となり、素数階乗と呼ぶ。整数論の本では普通、 $5\#$ と書く。

階乗の上限、今は 5 を一般に p と書けば $p\#$ となり、prime factorial, primorial, 階乗素数 と呼ぶ。

また、 $p\# + 1$ は ユークリッドが「素数の無限性」の証明に使ったので、ユークリッド数と呼ばれる。または、 $p\# - 1$ と並んで、primorial prime 素数階乗素数とも呼ばれる。

2. J 言語に於ける 計算法

1) $p = 5$ の時:

普通の階乗] f5 = . ! 5 -> 120

その素因数分解 q: f5 -> 2, 3, 2, 2, 5

重複を除く ~. q: f5 -> 2, 3, 5

その積 */ ~. q: f5 -> 30

即ち、 pf_5 (prime factorial 5) = . 30 である。

2) $p = 7$ の時:

一挙にやれば]pf7=. */ ~.q: ! 7 -> 210

3) p 値が大きい時には、多倍長演算の指定 x が必要となる。

例: 10000 以下で最大の素数 8999 で。

所要時間 time=:6!:2 として、

time '*/ ~. q: f8999=.! 8999x' -> 2.4853 sec。

積の値 */ ~. q: f8999=.! 8999x

```
22641840353967256678383242229345193494462463968620701472789232246095564542965314
3721970989672766151251463335966519260042933254139214275031
```

積の桁数 # ":*/ ~. q: f8999=.! 8999x -> 3853 桁

素数因子の末尾 20 ケ分 _100 { . ": ~. q: f8999=.! 8999x

```
8819 8821 8831 8837 8839 8849 8861 8863 8867 8887 8893 8923 8929 8933 8941 8951
8963 8969 8971 8999
```

素数表と比較されたい。

3. ユークリッド数の因数分解

整数論の記号では $p\# + 1$ が素数か合成数かを判定出来る。

トライ出来た最大値の例をしめす。 $p = 113$ である。

]f113 =. ! 113x ->

```
22311927486598136465966070212187151182564399087952213171022161345724023063584
214692821047352118139068425569179220877461124773845924561575264739138192463311
6672000000000000000000
000000000
```

q: 1 + */ ~. q: f118 ->

```
5122427•2025436786007•3046707595069540247157055819
```

time 'q: 1 + */ ~. q: f113' -> 45.6877 (sec)。

Yahoo 知恵袋・数学カテ の回答例でも、 $p = 137$ で勘弁を乞うとあった。

(私の PC は、富士通のノートパソコン FMVA555BRX Windows7 Home Premium

32 ビット 正規版、メモリ 4GB、HDD 640GB である。)

4. $p\# - 1$ の素因数分解

前例を用い、マイナス 1 をトライしたが、演算時間が長くなり、演算は不可能であった。

5. 幸運数 (fortunate number)

例 1) を挙げる。

$p = 5$ とすれば、その素数連乗 $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ である。その時、

$P + 1$ より大きい最小の素数を q とすれば、素数表から $q = 37$ である。

その差 $q - P =$ 「必ず素数になる」との予想を立てた人が居る。今の例では

$= 37 - 30 = 7 =$ 素数！ その人の名前 Reo Fortune を採り、この素数を、

何と Fortunate 数 と呼ぶ。

例 2) を挙げよう。

$p = 2$ の時、素数連乗は $P = 1 \cdot 2 = 2$ で、 $P + 1 = 3$ より大きい最小の

素数は $q = 5$ 故、 $q - P = 5 - 2 = 3 =$ 素数 = 幸運数 である。

例 3)

$p = 3$ の時、素数連乗は $P = 2 \cdot 3 = 6$ で、 $P + 1 = 7$ より大きい最小の

素数は $q = 11$ 故、 $q - P = 5 =$ 素数 = 幸運数 である。

例 4)

$p = 7$ とする。 $p\# = 7\# = P = 210$ から、 $P + 1 = 211$ より大きい最小の素数は

$q = 223$ で、 $q - P = 223 - 210 = 13 =$ 素数 = 幸運数 となる。

例 5)

$p = 11$, $P = 11\# = 2310$ 、 $P + 1 = 2311$, $q = 2333$, $q - P = 2333 - 2310 = 23$

$=$ 素数 = 幸運数。

例 6) 以上をやって見て下さい。

$p = 13$, $P + 1 = 30031$, $q = 30047$, $q - P = 17 =$ 幸運数

例 7)

$p = 17$, $P + 1 = 510511$, $q = 510529$, $q - P = 19 =$ 幸運数

例 8)

$p = 19$ 、 $P + 1 = 9699691$, $q = 9699713$, $q - P = 23 =$ 幸運数

ここまでで、第 8 番目までの幸運数が求められた。

次の幸運数は 37 なのですが、判りますか？

7. むすび

新年に当たり、皆様の幸運を祈ります。J 言語で楽しみましょう。

文 献

1) realhuman18 さん「素数階乗に 1 加えた数の素因数分解を出来るだけ

多く教えて下さい。」Yahoo Japan ! 知恵袋>サイエンス>数学

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1137728396

2) Chris K. Caldwell 編著・SOJIN 編訳「素数大百科」共立出版、

pp.385、2004.6.5 初版 2 刷、\5800