

いやらしい 固有値問題 の例解

中野嘉弘 (札幌市、あと一月で89歳)

は し が き

2011/FEB/26 の JAPLA 研究会に「品の悪い行列の固有値問題」と題する似たような
エッセイを書いた(文献1)。YAHOO! Japan 知恵袋の「数学」のカテゴリに、最近
(Nov/23)、同類の質問(gold sakubun no sippitusya さん)を見た(文献2)。

.....

次の 5×5 行列の固有値と固有ベクトルを求め、その手順も教えて下さい。

```
[-4 0 0 0 6]
[32 -2 -2 -8 -40]
[49 -5 -2 -13 -59]
[-25 2 1 6 29]
[-4 -1 1 1 4]。
```

.....

J 言語の名人・志村流の J 言語のプログラム・ルーチン JLPACK (文献3)で直解可能
かも知れないが、私は ADDON プログラムの DL の仕方には未だ、不慣れなので諦めた。

他の回答者も現れぬので、私(中野)の使い慣れた方法(文献4)で回答を与えた。

しかし、これらの解法では不満が残った。

1. 手慣れた 回答例

与行列を `gol155` と命名し、

●回答1: ルーチン `N_evec gol155` より、

固有値は レヴェリエ・ファデーエフ法(固有方程式を解く簡単な手法)から

$2, 2, -1, -1, 0$ (重複解2組あり)、

固有ベクトルは、各固有値に対応して、(縦ベクトルとして読むが)

```
[ ]
| 2 |
[ ]
```

_____]

```
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
└──────────────────────────────────┘
```

```
| 2 |
```

```
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
└──────────────────────────────────┘
```

```
| _1 |
```

```
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
└──────────────────────────────────┘
```

```
| _1 |
```

```
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
└──────────────────────────────────┘
```

```
| 0 |
```

```
| 12.000 12.000_12.000_12.000 12.000 |
| _76.000_76.000 76.000 76.000_76.000 |
| *****116.000116.000***** |
| 56.000 56.000_56.000_56.000 56.000 |
| 8.000 8.000 _8.000 _8.000 8.000 |
└──────────────────────────────────┘
```

即ち、重複固有値に対応しては、すべて $|0\ 0\ 0\ 0\ 0|$ 、これが通常のことである。

単一固有値 $\lambda = 0$ に対応しては、直上のノン・ゼロの値である。

これに対する、質問者は「もっとやさしい回答をお願いします。」と！ 御不満らしい。

2. 第 2 の 解

●● 回答 2 : 使い慣れた第 2 のルーチンでやって見る。

中野の関数 (2 2 _1 _1 0) eigvec gol55 から、

下表の如く、各固有値に対応して、しめて 5 組 求められる (固有ベクトルは縦ベクトルとして読む)。

$$\begin{array}{c|c} \hline \begin{array}{ccccc|ccccc} _6 & 0 & 0 & 0 & 6 & _6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 32 & _4 & _2 & _8 & _40 & 32 & _4 & _2 & _8 & _40 \\ 49 & _5 & _4 & _13 & _59 & 49 & _5 & _4 & _13 & _59 \\ _25 & 2 & 1 & 4 & 29 & _25 & 2 & 1 & 4 & 29 \\ _4 & _1 & 1 & 1 & 2 & _4 & _1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \hline \begin{array}{ccccc|ccccc} _3 & 0 & 0 & 0 & 6 & _3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 32 & _1 & _2 & _8 & _40 & 32 & _1 & _2 & _8 & _40 \\ 49 & _5 & _1 & _13 & _59 & 49 & _5 & _1 & _13 & _59 \\ _25 & 2 & 1 & 7 & 29 & _25 & 2 & 1 & 7 & 29 \\ _4 & _1 & 1 & 1 & 5 & _4 & _1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \hline \begin{array}{ccccc|c} _4 & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ 32 & _2 & _2 & _8 & _40 & \\ 49 & _5 & _2 & _13 & _59 & \\ _25 & 2 & 1 & 6 & 29 & \\ _4 & _1 & 1 & 1 & 4 & \end{array} \\ \hline \end{array}$$

この場合、解は全て、ノン・ゼロではあるが、同一固有値に対しては、夫々、同じベクトル値である。

質問者からは、「順序よく、易しい回答をお願いします」との反応があった。

勿論、私以外の回答はなかった。(閲覧者は多数あったが！)

さて、どうしましょう？

3. まともな(?) 第 3 の 解

☆ 与行列 $\text{gol55} = A =$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{4} & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ 32 & \underline{2} & \underline{2} & \underline{8} & \underline{40} & \\ 49 & \underline{5} & \underline{2} & \underline{13} & \underline{59} & \\ \underline{25} & 2 & 1 & 6 & 29 & \\ \underline{4} & \underline{1} & 1 & 1 & 4 & . \end{array}$$

(負数には記号アンダーバー $\underline{\quad}$ を付して示す事あり。)

△ 固有値

LF (ルヴリエ・ファデーエフ) 法, 即ち、固有多項式 $|A - \lambda I| = 0$

を直接解く方法などで、LF A から、

$$\lambda = 0, \underline{1}, \underline{1}, 2, 2。$$

★ 固有ベクトル

行列やベクトルの内積(inner product) を ip として、

連立方程式 $(A - \lambda I) \text{ip} (x, y, z, u, w) = 0$ を解く。

1) $\lambda = 0$ の時、

$$\begin{array}{l} -4x + 6w = 0 \\ 32x - 2y - 2z - 8u - 40w = 0 \\ 49x - 5y - 2z - 13u - 59w = 0 \\ -25x + 2y + z + 6u + 29w = 0 \\ -4x - y + z + u + 4w = 0 . \end{array}$$

解は、

$$w = 2u/14, x = 3u/14, y = -19u/14, z = -29u/14 。$$

例えば、 $u = 14$ として、 $(x, y, z, u, w) =$

$$(3, -19, -29, 14, 2)。$$

2) $\lambda = -1$ の時、

$$\begin{array}{l} -3x + 6w = 0 \\ 32x - y - 2z - 8u - 40w = 0 \\ 49x - 5y - z - 13u - 59w = 0 \\ -25x + 2y + z + 7u + 29w = 0 \\ -4x - y + z + u + 5w = 0 . \end{array}$$

解は、

$$x = 2w, y = 6w - 2u, z = 9w - 3u 。$$

即ち、例えば、 $u = 0, w = 1$ として、 $(x, y, z, u, w) =$

$$(2, 6, 9, 0, 1)。$$

他に独立解は、例えば、 $u = 1, w = 0$ として、 $(x, y, z, u, w) =$

$$(0, -2, -3, 1, 0)。$$

3) $\lambda = 2$ の時、

$$\begin{array}{l} -6x + 6w = 0 \\ 32x - 4y - 2z - 8u - 40w = 0 \\ 49x - 5y - 4z - 13u - 59w = 0 \\ -25x + 2y + z + 4u + 29w = 0 \\ -4x - y + z + u + 2w = 0 . \end{array}$$

解は、

$$x = w, y = -u - 2w, z = -2u。$$

即ち、例えば、 $u = 0, w = 1$ として、 $(x, y, z, u, w) = (1, -2, 0, 0, 1)$ 。

他に独立解は、例えば、 $u = 1, w = 0$ として、 $(x, y, z, u, w) = (0, -1, -2, 1, 0)$ 。

● かくして、固有ベクトルが得られた。まとめれば

$$v_1 = (3, -19, -29, 14, 2)、$$

$$v_2 = (2, 6, 9, 0, 1)、$$

$$v_3 = (0, -2, -3, 1, 0)、$$

$$v_4 = (1, -2, 0, 0, 1)、$$

$$v_5 = (0, -2, -3, 1, 0)。$$

対応する固有値は

$$\lambda = 0, -1, -1, 2, 2。$$

これならどうだ！

ただし、質問者さんからは、何の反応も、未だ無い。

4. 連立方程式の解法

この第 3 節の、肝心の「連立方程式の解法」にはちょっと苦労があった。

実は、世界的に有名な Mathematica の本舗である 計算エンジン、WolframAlpha

を利用したのだ。これは、J 言語の強力なライバルであるな！

利用法を、示す。

0) $\lambda = 0$ の場合:

$$\text{solve } -4x+6w=0, 32x-2y-2z-8u-40w=0, 49x-5y-2z-13u-59w=0, -25x+2y+z+6u+29w=0, \\ -4x-y+z+u+4w=0$$

と入力して、等号 = の設定シンボルを押すだけでよい。

Input interpretation: で入力分に反応し、計算可能な場合には、Result: と

して解が出る。その後、題意に従って、ちょっと計算を補足すれば良い。

1) $\lambda = -1$ の場合:

```
solve -3x+6w=0,32x-y-2z-8u-40w=0,49x-5y-z-13u-59w=0,-25x+2y+z+7u+29w=0,-4x-y+z+u+5w=0
```

と入力して、等号 = の設定シンボルを押す。

Result は複雑であり、複数解の存在を示す。

2) $\lambda = 2$ の場合:

```
solve -6x+6w=0,32x-4y-2z-8u-40w=0,49x-5y-4z-13u-59w=0,-25x+2y+z+4u+29w=0,-4x-y+z+u+2w=0
```

と入力して、等号 = の設定シンボルを押す。

Result は、この場合も複雑であり、複数解の存在を示した。

入力が不合理であれば、指摘する反応がある。時には、go on computing

(計算中) の反応があつて、いわゆるフリーズ状態になる場合もある。

その場合には、等号 = の設定シンボルを押し直すと、巧く行く場合がある。

本件の計算の場合には、再三、その目にあつた。これが難問な筈だ!

5. 一挙に、この固有値問題を解くには

本件の難問が、間接的あがら解けたからには、一挙に解けないか? 試みた。

Input としては、

```
eigenvectors {{-4,0,0,0,6},{32,-2,-2,-8,-40},{49,-5,-2,-13,-59},{-25,2,1,6,29},{-4,-1,1,1,4}}
```

と入力して、等号 = の設定シンボルを押す。

Result:

```
v1 = (1,-2, 0, 0, 1)
v2 = (0,-1,-2, 1, 0)
v3 = (2, 6, 9, 0, 1)
v4 = (0,-2,-3, 1, 0)
v5 = (3, -19, -29, 14, 2)
```

Corresponding eigenvalues:

```
 $\lambda_1 = 2$ 
 $\lambda_2 = 2$ 
 $\lambda_3 = -1$ 
```

$$\lambda_4 = -1$$

$$\lambda_5 = 0$$

以上 Computed by Wolfram Mathematics であった。

6. むすび

兎に角、苦心惨憺 (Mathematica でもやっと) 解けた固有値問題である。

いやらしい極みであるが、色々、参考になった。

資 料

- 1 -1) 中野嘉弘:「品の悪い行列の固有値問題」JAPLA 2011/Feb/26、pp.6
- 2) 中野嘉弘:「複素固有値でのジョルダン分解」JAPLA 2011/Mar/26、pp.6
- 3) 中野嘉弘:「固有ベクトル計算法 (志村論文の理解)」JAPLA 2010/Sep/25、pp.11
- 4) 中野の回答:「行列の固有値が重解のときの変換行列」sappyqq62 さん 2011/7/3 16:38
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail.php?qid=1065798560

- 2 -1) gold_sakubun_no_sippitusya さん、2011/11/23
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1476048359
- 2) gold_sakubun_no_sippitusya さん、2011/11/29
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1176435176

- 3 -1) 志村正人:「マトリックスの数学 (1) 行列の固有値」pp.47、APL 蓼科合宿、2010/Aug5-7
- 2) 志村正人:「マトリックスの数学 (2) 行列の変換」pp.40、2010/Sept/25
他、多数あり

- 4) nakano 回答:文献 2-2 に相当。