

## 超幾何関数とJのコード解析およびその利用

西川 利男

### 1. ガウスの超幾何関数とは[1]

数学の王者、フリードリッヒ・ガウスは1812年に次の超幾何微分方程式

$$x(x-1)y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)y' + \alpha\beta\gamma = 0$$

の解として得られる、次のようなべき級数で表される超幾何(Hypergeometric)関数を発表した。

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

これは、解析的操作に熟練するため、取り上げられ、やがて忘れられてしまうような、単なる教科書演習問題ではなかった。パラメータ  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  にある特定な値を与えると、例えば、対数、三角関数などから始まり、数理物理学に現れるさまざまな関数となるのである。

そのいくつかを挙げてみる。

$$F(1, \beta, \beta, x) = \frac{1}{1-x}$$

$$F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n$$

$$F(1, 1, 2, x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^n}{n+1} = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(1, \beta, 1, x) = e^x$$

$$\lim_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} F(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4\alpha\beta}) = \frac{\sin x}{x}$$

### 2. Jの超幾何関数(H.)の定義コードの解析

#### 2. 1 接続詞(!.)と拡張された階乗

はじめに、超幾何関数の定義で重要な役割を持つ接続詞(!.)についてすこし述べる。接続詞(!.) (Customize)は2つの特定の引数を取り、通常にはない新しい機能を持ったプリミティブを作成する(Customize)。これについては以前に報告したことがある[2]が、今回は別の機能である。

[1] ベル、田中、銀林訳「数学をつくった人びと」上、p. 265 東京図書(1985).

[2] 西川利男「Jの接続詞 !. Fit(Customize)とは」JAPLA 研究会資料 2009/4/25

ここでは、次のように定義されている。

$$x \hat{!} . r y \longleftrightarrow */ x + r * i . y$$

つまり、接続詞(!.)の左引数として動詞 $\hat{!}$ 、右引数として名詞の値 $r$ をとり、新しく2項動詞を作る。そしてその動詞の左引数として $x$ 、右引数として $y$ をとる。

この使い方を見るために、例えば次のような簡単な実験を試してみる。

$$\begin{aligned} 5 (\hat{!} . _1) 3 &\rightarrow */5 + _1 * i . 3 \rightarrow */5 + _1 * 0 1 2 \rightarrow */5 + 0 _1 _2 \\ &\rightarrow */5 4 3 \rightarrow 60 \end{aligned}$$

つまり、4から3だけ下降する拡張された階乗(falling factorial)が得られる。あるいは、次のようになる。

$$\begin{aligned} 5 (\hat{!} . 1) 3 &\rightarrow */5 + 1 * i . 3 \rightarrow */5 + 1 * 0 1 2 \rightarrow */5 + 0 1 2 \\ &\rightarrow */5 6 7 \rightarrow 210 \end{aligned}$$

この場合は4から3だけ上昇する拡張された階乗(Rising factorial)が得られる。これに名前をつけて定義する。

$$g =: \hat{!} . 1$$

$$4! : 0 \langle ' g ' \rangle \rightarrow 3 \text{(動詞)}$$

$$5 g i . 4 \rightarrow 1 5 30 210$$

## 2. 2 超幾何関数(H)の定義とその解析

J Vocabulary のHypergeometricには次の定義がある。

---

```
rf=: 1 : '(,x.)"_ ^!.1/ i.@[' NB. Rising factorial
L1=: 2 : 'x.rf %&(*) y.rf'
L2=: (i.@[ ^~ ]) % (!@i.@[)
Hyp=: L1 (+/ . *) L2
H =: 2 : '(m. Hyp n. ) "0'
```

---

超幾何関数の計算を大きく見てみると、級数の各項は係数部分(L1)と $x$ のべき乗(L2)部分から成っていることがわかる。

$$H = \sum L1 * L2$$

Vocabulary の解説には次の例が挙げられている。この例を使ってコーディングをトレースしてみよう。

---

```
' a b '=: 2 3 5; 6 5
a L1 b
(2 3 5"_ ^!.1/ i.@[) %&(*) 6 5"_ ^!.1/ i.@[
t=: 4 [ z=: 7
t a L1 b z
1 1 1.71429 4.28571
t (a H b , a H. b) z
295 295
```

---

まず、係数部分 L1 について検討する。これは拡張された階乗の比から成っている。

2 3 5 L1 6 5

先に定義した g は Vocabulary の定義 rf と同じである。一つずつやってみる。

```

2 g i.4
1 2 6 24
3 g i.4
1 3 12 60
5 g i.4
1 5 30 210
6 g i.4
1 6 42 336

```

```

2 3 5 g / i.4
1 2 6 24
1 3 12 60
1 5 30 210
*/ 2 3 5 g / i.4
1 30 2160 302400

```

```

6 5 g / i.4
1 6 42 336
1 5 30 210
*/ 6 5 g / i.4
1 30 1260 70560

```

```

(* / 2 3 5 g / i.4) % (* / 6 5 g / i.4)
1 1 1.71429 4.28571

```

次にべき乗部分 L2 を見てみる。

L2

```

+-----+-----+
|+-----+-----+|%|+-----+-----+| | | | | | | | | | | | | | |
||+-----+-----+]| | |+-----+-----+|@| [|
||i. |@| [| | | ^ ~ | | | | | ! |@| i. | | | |
||+-----+-----+| | | |+-----+-----+| | |
|+-----+-----+| |+-----+-----+|
+-----+-----+

```

Vocabulary の例のように

4 L2 z

とすると、これは

$(i.4)^{\sim z} \% (! i.4)$

となるので

$((z^0) (z^1) (z^2) (z^3)) \% ((!0) (!1) (!2) (!3))$

となる。

つまり通常の階乗の逆数を係数とするべき乗である。

最終の結果は

$$\frac{1}{0!} * z^0 + \frac{1}{1!} * z^1 + \frac{1.71429}{2!} * z^1 + \frac{4.28571}{3!} * z^2$$

において、 $z = 7$ とした値が得られる。

```
4 (2 3 5 H 6 5) 7
```

295

この機能を持つものが、超幾何関数の接続詞(H.)であり、次のように同じ結果が得られる。

```
4 (2 3 5 H. 6 5) 7
```

295

### 3. Jの超幾何関数(H.)の利用

パラメータを次のようにとることにより超幾何関数は指数関数の近似になる。最初の8項をとった場合は次のようになる。

```
8 (1 H. 1) i. 6
```

```
1 2.71825 7.38095 19.8464 51.8063 128.619
```

左引数をとらずに1項関数として使用したときは、級数和を収束するまで行った値を与える。

```
(1 H. 1) i. 6
```

```
1 2.71828 7.38906 20.0855 54.5982 148.413
```

つまり、普通の指数関数と同じ値となる。

```
^ i. 6
```

```
1 2.71828 7.38906 20.0855 54.5982 148.413
```

誤差関数、正規分布関数への利用はつぎのようになる。

```
erf   =: (1 H. 1.5)@*: * 2p_0.5&* % ^@: *      NB. error function
n01cdf=: -: @: >: @: erf @: ((%0.5)&*)      NB. CDF of normal 0,1

erf 0.5 1 1.5
0.5205 0.842701 0.966105
n01cdf _2 _1.5 _1 _0.5 0 0.5 1 1.5 2
0.0227501 0.0668072 0.158655 0.308538 0.5 0.691462 0.841345 0.933193
0.97725
```

NB. HyperGeometric Function by Gauss

rf=: 1 : '(, x.)" \_ ^!.1/ i.@[' NB. Rising factorial  
L1=: 2 : 'x.rf %&(\*)/ y.rf'  
L2=: (i.@[ ^~ ]) % (!@i.@[  
Hyp=: L1 (+/ . \*) L2

H =: 2 : '(m. Hyp n. ) "0'  
NB. 4 (2 3 5 H 6 5) 7  
NB. 295  
NB. 8 (1 H 1) i.6  
NB. 1 2. 71825 7. 38095 19. 8464 51. 8063 128. 619

NB. 'a b'=: 2 3 5; 6 5  
NB. a L1 b

NB. (2 3 5" \_ ^!.1/ i.@[) %&(\*)/ 6 5" \_ ^!.1/ i.@[  
NB. t=: 4 [ z=: 7

NB. t a L1 b z  
NB. 1 1 1. 71429 4. 28571

NB. t (a H b , a H. b) z  
NB. 295 295

NB. f=: 1 H. 1

NB. 8 f i. 6  
NB. 1 2. 71825 7. 38095 19. 8464 51. 8063 128. 619

NB. f i. 6  
NB. 1 2. 71828 7. 38906 20. 0855 54. 5982 148. 413

NB. ^ i. 6  
NB. 1 2. 71828 7. 38906 20. 0855 54. 5982 148. 413

NB. from J Vocaburary =====

NB. Extended Factorial / Rising

g =: ^ !. 1  
g2 =: 2 g i.4  
g3 =: 3 g i.4  
g5 =: 5 g i.4  
g6 =: 6 g i.4

h1 =: i.@[ ^ ~ ]