

## 多項式の $\alpha$ -進展開法

ラング氏の線形代数学(下)より

中野 嘉弘 (札幌市 87 歳)

FAX 専 011-588-3354

E-mail: yoshihiro@river.ocn.ne.jp

### はしがき

あまり聞かない名前のお話である。最近、大学同期の旧友・  
芹沢正三氏(数学科)から、彼の翻訳になる「数学書」を寄贈された。  
「ラング 線形代数学(上・下)」である。(文献1)

その下巻の中に、面白い話題を発見したので、トライしてみた。

第12章・多項式と素因子分解、第7節・多項式の  $\alpha$ -進展開 の末尾の  
練習問題である。(1. (a), (b), (c), (d) と 2. (a), (b), (c), (d))。  
それぞれ、多項式の 2-進展開 と 3-進展開 の例題である。

数値計算の N-進数の変換問題で、カナダ産の J 言語は威力を発揮している  
ので、同好の問題であろうかと楽観して、トライしてみたが、案に相違して  
骨太の面白い問題であったので、報告して置きたい。

## 2. 多項式の $\alpha$ -進展開法

$$f(t) = c_0 + c_1 \cdot (t-\alpha) + \dots + c_n \cdot (t-\alpha)^n$$

の如く展開する。よく知られた部分分数展開に関する有効な算法である。

## 3. 練習問題

文献 1-b) p. 142

1. 次の多項式の 2 - 進展開を求めよ。

- (a)  $t^2 - 1$     (b)  $t^3 + t - 1$   
 (c)  $t^2 + 3$     (d)  $t^4 + 2t^3 - t + 5$

2. 問題1の多項式の 3 - 進展開を求めよ。

(回答は、本稿末尾に、 $c_0, c_1, c_2 \dots$ の順に示した。)

#### 4. J 言語 での 準備

例として、 $f_1(x) = x + 2$ ,  $f_2(x) = x^2 + 2x - 3$  を採る。

J 言語では、係数に着目し、 $f_1 = . 1 \ 2$ 、 $f_2 = . 1 \ 2 \ _3$  と置く。

1) 加減算: 各多項式の次数(即ち、項数)を揃えてから演算する。

$$f_1 + f_2 = . (0 \ 1 \ 2) + (1 \ 2 \ _3) \rightarrow (1 \ 3 \ _1)$$

即ち、 $\rightarrow x^2 + 3x - 1$  (答)。

2) 多項式の掛け算:

関数 `polymult =: pm=: +//.@(*/)`、

計算例 `f1 pm f2`  $\rightarrow 1 \ 4 \ 1 \ _6$ 、

即ち  $x^3 + 4x^2 + x - 6$ 。

3) 多項式の冪乗:

関数 `bm` ( 掛け算関数 `pm` の応用、`script` は本稿末尾に)

計算例(2 乗) `f1^2`  $\rightarrow 2 \ bm \ f1$   $\rightarrow 1 \ 4 \ 4$ 、

即ち  $x^2 + 4x + 4$ 。

計算例(4 乗) `f1^4`  $\rightarrow 4 \ bm \ f1$   $\rightarrow 1 \ 8 \ 24 \ 32 \ 16$ 、

即ち  $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ 。

#### 5. J 言語 での 計算 (その一)

練習問題 1. (2 進展開)

(a)  $t^2 - 1 \rightarrow t - 2 = x$  として展開する。

即ち  $t = x + 2$  故、 $(x + 2)^2 - 1$  を計算する。

2 次の項は係数で表示して  $x^2 = . 1 \ 2$  であるから、その

2乗は  $2 \text{bm } x^2 = 2 \text{bm } (1 \ 2) \rightarrow 1 \ 4 \ 4。$

変換後は結局、  $(1 \ 4 \ 4) + (0 \ 0 \ 1) \rightarrow (1 \ 4 \ 3)。$

即ち、文字式で  $x^2 + 4x + 3$  となる。

昇幂順の係数で示せば、逆順で、解は  $3, 4, 1。$

(c)  $t^2 + 3 \rightarrow t - 2 = x$  として展開する。

変換後は結局、  $(1 \ 4 \ 4) + (0 \ 0 \ 3) \rightarrow (1 \ 4 \ 7)。$

即ち、文字式で  $x^2 + 4x + 7$  となる。

昇幂順の係数で示せば、逆順で、解は  $7, 4, 1。$

(b)  $t^3 + t - 1$

$3 \text{bm } (1 \ 2) \rightarrow 1 \ 6 \ 12 \ 8$  から

$(1 \ 6 \ 12 \ 8) + (0 \ 0 \ 1 \ 2) + (0 \ 0 \ 0 \ 1)$

$\rightarrow (1 \ 6 \ 13 \ 9)。$

変換後の文字式は、  $x^3 + 6x^2 + 13x + 9$

解は  $9, 13, 6, 1。$

(d)  $t^4 + 2t^3 - t + 5$

$4 \text{bm } (1 \ 2) \rightarrow 1 \ 8 \ 24 \ 32 \ 16$  、

$3 \text{bm } (1 \ 2) \rightarrow 1 \ 6 \ 12 \ 8$  から

$(1 \ 8 \ 24 \ 32 \ 16) + 2*(0 \ 1 \ 6 \ 12 \ 8) - (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2) + (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5)$

$\rightarrow (1 \ 10 \ 36 \ 55 \ 35)。$

$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 55x + 35$

解は  $35, 55, 36, 10, 1。$

## 6. J 言語 での 計算 (その二)

### 練習問題 2. (3 進展開)

やり方は、前節同様であるから、J 言語らしく、簡潔にやろう。

$x = . 1 \ 3$

$$x^2 = . 2 \text{ bm } x \rightarrow 1 \ 6 \ 9$$

$$x^3 = . 3 \text{ bm } x \rightarrow 1 \ 9 \ 27 \ 27$$

$$x^4 = . 4 \text{ bm } x \rightarrow 1 \ 12 \ 54 \ 108 \ 81$$

(a)  $x^2 + (0 \ 0 \ \_1) \rightarrow 1 \ 6 \ 8$  (解は逆順で)

(c)  $x^2 + (0 \ 0 \ 3) \rightarrow 1 \ 6 \ 12$  (解は逆順で)

(b)  $x^3 + (0, 0, x) + ((3 \# 0), \_1) \rightarrow 1 \ 9 \ 28 \ 29$  (解は逆順)

(d)  $(x^4) + (2*(0, x^3)) + (\_1)*((3\#0), x) + (5*((4\#0), 1))$

括弧の個数に御注意!

$$\rightarrow 1 \ 14 \ 72 \ 161 \ 137 \quad (\text{解は逆順})$$

兎に角、アット云う間に回答出来た。

## 7. む す び

代数方程式の根の変換や、さらに チルンハウゼン変換にも便利に  
使えよう。J言語の能力の便利さが再び示された。

## 文 献

1-a) サージ・ラング Serge Lang 原著: 芹沢正三訳  
「ラング 線形代数学(上)Linear Algebra 1987」筑摩書房

ちくま学芸文庫・2010・5・10 第一刷、pp.272

(1971年4月15日、ダイヤモンド社から刊行の再発行)

1-b) サージ・ラング Serge Lang 原著: 芹沢正三訳  
「ラング 線形代数学(下)Linear Algebra 1987」筑摩書房  
ちくま学芸文庫・2010・5・10 第一刷、pp.268

(1971年4月15日、ダイヤモンド社から刊行の再発行)

## 練習問題 の 解答

1. (a) 3, 4, 1 (b) 9, 13, 6, 1  
(c) 7, 4, 1 (d) 3, 55, 36, 10, 1
2. (a) 8, 6, 1 (b) 29, 28, 9, 1  
(c) 12, 6, 1 (d) 137, 161, 72, 14, 1

### Scripts

NB. power of pm function (polynomials multiplication)

```
bm=: 3 : 0
:
if. x = 0 do. 1 return. end.

im=.x
i=. 1
ypm =. y *1
if. i = im do. goto_e. end.
label_1. i=.i+1
ypm =. ypm pm y

if. i = im do. goto_e. end.
goto_1.

label_e.
NB. wr i
ypm
)
```