財務計算あれこれ

第４回　年率および年価が一定でない場合の計算式 (1)

No. 4. Formulas for Non-Fixed Rates and Annuities (1)

(株) 竹内ハガネ商行　　竹内寿一郎

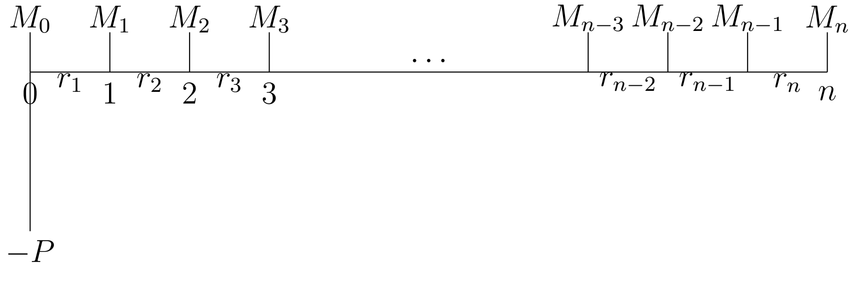
１．はじめに

前回までの報告までは、年利 r は期間を通して一定であり、また年価・返済額 $M(Annuities)$ も一部を除いては一定であると仮定して話を進めてきた【2】、【3】、【4】。本来利率は年によって変わることも多く、年価や積立額などは年ごとに変化するのは当然の仮定と言ってよい。ローンの償還表は金利、返済額も一定になるように設計・計算され、作表されるが、時々ある時点から金利が変わり、かつ返済額が変更されることがある。勿論積立貯金などの場合のように、積立額は毎回都合により変えることができるのは当然で、金融機関の都合により利率も変わって当然である。

今回の報告は年利、積立額・返済額が毎回変動することを許す場合の計算式を提案するものであり、より一般的なのでこれらの式は従来型の金利・年価一定の場合にも適用することが可能である。さらにいうならば、これまでよく使われて来た、期首だとか期末だとかいう馬鹿な概念は全く捨て去って欲しい。期末も期首も突き詰めれば一点であり、9 月 30 日に払えば期末で、10 月 1 日に払えば期首になることは無い。そうとすれば、それでは何時までが期末で何時からが期首になるであろうか？いやいや、何時何分何秒からが期末で何時何分何秒からが期首になるか？　繰り返して言うが、私は頭金のようなゼロ期にお金の出入りがある取引が期首であり、満期の時点でお金の出入りのある取引が期末に対応するものであると思っている。その中間でのお金の出入りは、都合によりその期の末になっても、その期の始めになっても大差は無いはずである。期末払いで 1 秒でも次期に払ったらペナルティを取るであろうか？期首払いが 1 日、2 日遅れたとしても目くじらたてて怒ることが無いのと同じで、期末が少し遅れて期首になっても許されることもある。つまり、お金の出入りの時期は期末と期首はほぼ同じ時点であり、一点と考えてよい理由はここにあり、本質的には前倒しで勘定するのが期首で、期間の後で勘定をする行為が期末であることはいうまでもない。

２．ローン返済を例とするキャッシュフロー

それではローン返済を例としてそのキャッシュフローを図示してみる。



ここで、期間は n、M_0 は初期支払額、M_n は満期支払額、各期の返済額は M_i、

P は借入額、各期における変動利率を $r_1, r_2, \cdots, r_n$ とする

期	各期までの元利合計金額
0	M_0
1	$M_1 + M_0(1+r_1)$
2	$M_2 + M_1(1+r_2) + M_0(1+r_1)(1+r_2)$
3	$M_3 + M_2(1+r_3) + M_1(1+r_2)(1+r_3) + M_0(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)$
4	$M_4 + M_3(1+r_4) + M_2(1+r_3)(1+r_4) + M_1(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)$ $+ M_0(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$M_n + M_{n-1}(1+r_n) + M_{n-2}(1+r_{n-1})(1+r_n) + M_{n-3}(1+r_{n-2})(1+r_{n-1})(1+r_n)$ $+ \cdots + M_1(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n)$ $+ \cdots + M_0(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n)$

このキャッシュフローは投資額 P に対して各期の利得を M_i、その期の年利を r_i としたときの損得計算にも利用できる。

[1] 現価と終価

ゼロ期に M_0 円預けて n 年後に元利合計を受け取るという定期預金は、上の表における満期 n 期での元利合計金額の式で、$M_1 = 0, M_2 = 0, \cdots, M_n = 0$ として計算すると、

(1)　S(終価)$=M_0(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n) = M_0 * R(n)$

従って現価 (P) は、

(2)　P(現価)$=\dfrac{S}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n)} = \dfrac{S}{R(n)}$

ここで S は時点 n での金額で、$(1+r_1), (1+r_2), (1+r_3), \cdots, (1+r_n)$ は n 期間における各年毎の変動金利で、$1/R(n)$ は期間 n における金額を現価に直すための現価係数を変動金利の場合に拡張したものである。

[2] 終価と年価

まず、各年毎にに発生する金額 M_i を全て満期における終価になおすことを考える。

(3)　$S_i = M_i(1+r_{i+1})(1+r_{i+2})\cdots(1+r_{n-1})(1+r_n) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

であるから、$S_n = M_n$、$S_0 = M_0(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{n-1})(1+r_n) = M_0 R(n)$

$$(4) \quad \begin{cases} S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} S_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{M_i R(n)}{R(i)} \qquad \text{ここで、} R(0) = 1 \text{ である} \\ \quad = M_n + M_{n-1}(1+r_n) + M_{n-2}(1+r_{n-1})(1+r_n) + \cdots \\ \qquad + M_0(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n) \end{cases}$$

[3] 現価と年価

次に各年毎にに発生する金額 M_i を全て現在価値になおすことを考える。まず、期間 i での金額 M_i を現価 P_i に直すと、

(5)　$P_i = \dfrac{M_i}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{i-1})(1+r_i)} = \dfrac{M_i}{R(i)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$

であるから、$P_0 = M_0$、$P_n = \dfrac{M_n}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{n-1})(1+r_n)} = \dfrac{M_n}{R(n)}$

$$(6)\quad \begin{cases} P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{M_i}{R(i)} \qquad \text{ここで } R(0)=1 \text{ とする} \\ \quad = M_0 + \dfrac{M_1}{(1+r_1)} + \dfrac{M_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \cdots + \dfrac{M_n}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)} \end{cases}$$

3．一定でない年率に関するＪの基本関数

財務計算のあれこれ第2回のチュートリアル[3]の中で、Jのパッケージにある intrest.ijs[1] におけるいくつかの基本関数について解説した。ここでは例をあげてそれらの応用も含めた使い方を解説し、最後に本論文の目的である一定でない年利や一定でない年価に対する財務の計算について述べることにする。

● effnom=: [: <: ([: >:] % [) ^ [

年利から実効年率を計算する。使い方は、

```
   12 effnom 0.07   NB. 年利7%の実効年率は (月利 0.07/12) として
0.0722901           NB. 月利 0.07/12 では年利 7.229%となり多くなってしまう
   4  effnom 0.07   NB. 年利7%の四半期を用いた実効年率は (利率 0.07/4) として
0.071859            NB. 四半期 0.07/4 の利率では 7%を超えて、0.71859 になる
```

逆に年利から月利を計算し、年利を 7%丁度にするには月利から計算した年利はどのくらいにするべ　　きかを計算する。そこで逆関数 nomeff を定義して、

```
   nomeff=:4 : 'x*<:(1+y)^(%x)'
   12 nomeff 0.07
0.0678497           NB. となりこれで実効年率を計算すると、
   12 effnom 0.0678497
0.07
```

同様に四半期の場合は、

```
   4 nomeff 0.07
0.0682341
   4 effnom 0.0682341
0.07                NB. のように少し低めに設定すれば丁度 7%になる
```

● intexpand=: 1&>.@(#~ 1&|.@(1&>)) # (#~ 1&>)

一定でない年利のリストとは例えば次のようなものである。

```
  NB.  <intlist>  is an interest list, e.g. 0.09 5 0.08 3 0.075
```

すなわち、最初の 5 年間は 0.09、次の 3 年間は 0.08、その後はずっと 0.075 ということを、まとめてこのように表現することにする

intexpand は 0.09 を 5 個、0.08 を 3 個、最後に 1 個 0.075 となるように先頭から利率のリストを作成する関数である。ただし、最後の利率は繰り返さないものとする

```
   intexpand 0.09 5 0.08 3 0.075
```

0.09 0.09 0.09 0.09 0.09 0.08 0.08 0.08 0.075

● intm=: <: @ ((^%)~ >:)

実効年率がきちんと年率に等しくなるような月利を計算する

```
   12 intm 0.07
0.00565415
```

(nomeff 0.07)%12 から年 7%となる月利を計算することも出来る

この月利で年率の実効値を計算すると 7%になることが確かめられる

```
   (1+0.00565415)^12
1.07
```

なお、nomeff で計算した 0.0678497 を使って 12 分の 1 にすると同様に、

```
   0.0678497%12
0.00565414
```

という具合に同じ結果を得る。ただし最後の桁は計算誤差である

同様に四半期でも intm を使って四半期で 7%ちょうどにする率を求めてみる

```
   4 intm 0.07
0.0170585
   (1+0.0170585)^4
1.07
```

● stretch=: [$] , ($,: @ {:)

これは 2 項関数で右に intexpand で出来た intrest list、 左に期間をとり、その期間全体での年利リストを作成する。すなわち、最後の利率を期間に応じて繰り返すという働きをする関数である

```
   10 stretch intexpand 0.09 5 0.08 3 0.075
0.09 0.09 0.09 0.09 0.09 0.08 0.08 0.08 0.075 0.075
```

stretch と intexpand を使って期間全体での一定でない年利のリストが出来る

● accint=: */\ @ (1&,) @ (stretch >: @ intexpand)

文字通り累積された年利を作成する。先頭に 1 を付加するのがキーポイント

```
   10 accint 0.09 5 0.08 3 0.075
1 1.09 1.1881 1.29503 1.41158 1.53862 1.66171 1.79465 1.93822
2.08359 2.23986
```
NB. 前行からの続き

これは先頭から順次利率を累積したもので、現価を出すには逆数にしなければならないし、終価を出すには後ろから累積しなければならないので、このままでは利用できない

●ここからは前回取り上げなかった関数について紹介する

vrep=: % @ >: @ intrep NB. 現価のために割引率を計算するには intrep はそのまま使うことは出来ない。最後の利率を繰り返してくれない

```
vrepnew=.% @ >: @ ([stretch 1&intrep)  NB. 修正した vrep を改めて定義する
```
現価を出すには利率の逆数が必要で、(6) 式の R(0),R(1),⋯,R(n) の逆数からなるリストを作成するために vrepnew を使う

```
   1,*/\ 10 vrepnew 0.09 5 0.08 3 0.075
1 0.917431 0.84168 0.772183 0.708425 0.649931 0.601788 0.557211
0.515936 0.479941 0.446457  NB. 前行の続き
```
これは 10 accint 0.09 5 0.08 3 0.075 の逆数に一致する

```
   % 10 accint 0.09 5 0.08 3 0.075
1 0.917431 0.84168 0.772183 0.708425 0.649931 0.601788 0.557211
0.515936 0.479941 0.446457  NB. 前行の続き
```
従って現価を計算するには次の関数を定義する

```
   accintnew=:*/\@(1&,@vrepnew)
   10 accintnew 0.09 5 0.08 3 0.075
1 0.917431 0.84168 0.772183 0.708425 0.649931 0.601788 0.557211
0.515936 0.479941 0.446457  NB. 前行の続き
```

●終価を出すには後ろから利率を累積しなければならない

```
accintback=:*/\. @ (,&1) @ (stretch >: @ intexpand)
```
のように定義する

```
   10 accintback 0.09 5 0.08 3 0.075
2.23986 2.05492 1.88524 1.72958 1.58677 1.45575 1.34792 1.24808
1.15562 1.075 1      NB. 前行の続き
```
終価は (4) 式のように R(n)/R(n)=1,R(n)/R(n-1)=(1+rn),⋯,R(n)/R(0)=R(n) となり、満期から逆に期間を遡って累積利率を計算する

この結果を確かめると、

```
*/\.(10 (stretch >:@intexpand) 0.09 5 0.08 3 0.075),1
2.23986 2.05492 1.88524 1.72958 1.58677 1.45575 1.34792 1.24808
1.15562 1.075 1      NB. 前行の続き
```
このとき、前にも出て来ているが (stretch >: @ intexpand) がフックであることに注意しよう。 stretch と >:@intexpand のフックだからこの前後の括弧は必要不可欠なものである

4．例題

●例題 1　10 年で 100 万円になるように毎年積立てたとき、期首、期末それぞれで積立額を与えた時の金利は？という例題があった [2]。答えは 7%であったが、これからキャッシュフローを作成して積立額が 100 万円になるか調べてみる。ちなみにそのときの積立額は、期首で、6.76425 万円、期末で 7.23775 万円であった。

```
intlist=.0.07 10
Mkishu=.(10#6.76425),0
Mkimatu=.0,10#7.23775
```

```
   +/Mkishu*10 accintback intlist
100
   +/Mkimatu*10 accintback intlist
100
```

●例題２　100 万円借りた時毎年一括払いで 10 年で完済するときの金額を与えたときの金利は？という問題で、これも金利は7%が正解で、このときの毎年の返済額は、期首払いで 13.3063 万円、期末払いで 14.23787 万円であった。

```
   MkishuB=.(10#13.3063),0
   MkimatuB=.0,10#14.23787
   +/MkishuB * 10 accintnew intlist
99.9999
   +/MkimatuB * 10 accintnew intlist
100.001
```

●例題３　なお、具体的なローン金額を、というお話だったので、1000 万円を金利 2.5%で 30 年の月払い契約をするときの月賦はいくらになるか？期首払いとすると (回数が多いので期にあまりこだわらなくてもよい)、毎月 3.94299442 万円であった。

```
   intlist=.(0.025%12),360
   Mkishu=.(360#3.94299442),0
   +/Mkishu * 360 accintnew intlist
1000
```

1000 万円になりました。

●例題４　月々同じ金額を貯金してゆき、金利 2.5%で、30 年後に 1000 万円になるときの積立額は？このときはわずか 1.86787565 万円、つまり２万円弱で良かった。期末で求めてみる。

```
   Mkimatu=.0,360#1.86787565
   +/Mkimatu * 360 accintback intlist
1000
```

わずか２万円弱で 30 年月賦で 1000 万円になる。1000 万円を借りて返す場合と 1000 万円貯蓄するのでは雲泥の差があることがわかる。

●ここからは利率が年によって変化する場合について例を挙げる。

例題５　24 年間１万円ずつ貯蓄してゆく。金利は最初の５年間が 10%、それ以降は 9%、期末払いとすると、満期でいくらになるか。これを求める関数は intrest.ijs にあり、

```
NB. ==========================================================
NB. accpay(accumulate payments)
accpay=: 3 : 0
NB.    dat= imm  0=advance, 1=arrears
```

```
NB.         frq  payment frequency 12=monthly
NB.         int  annual interest rate
NB.         pay  payments per annum
NB.
NB. e.g. accpay 1;12;0.10 5 0.09;24#1
NB.      = 24 years payments of 1 payable monthly in arrears
NB.        interest 10% for 5 years, 9% thereafter
if. 4 ~: #y do.
  'imm frq int pay' return. end.
'm f i p'=. y
len=. $p=. f#p%f
j=. }. len accint f intrep i
r=. j*+/\p%m}.1,(m-1)}.j
(len$(-f){.1)#r
)
   accpay 0;1;0.1 5 0.09;24#1  NB.期首、年単位
1.1 2.31 3.641 5.1051 6.71561 8.41001 10.2569 12.27 14.4643 16.8561 19.4632
22.3049 25.4023 28.7785 32.4586 36.4699 40.8421 45.6079 50.8027 56.4649
62.6367 69.364 76.6968 84.6895
   accpay 1;1;0.1 5 0.09;24#1  NB.期末、年単位
1 2.1 3.31 4.641 6.1051 7.65456 9.34347 11.1844 13.191 15.3782 17.7622
20.3608 23.1933 26.2807 29.6459 33.3141 37.3123 41.6704 46.4208 51.5986
57.2425 63.3943 70.0998 77.4088
   {:accpay 1;1;0.1 5 0.09;24#1
77.4088
   {:accpay 1;1;0.1 5 0.09;23#1
70.0998
   _2{."0 1 accpay 1;1;0.1 5 0.09;24#1   NB.期末、年単位
70.0998 77.4088
```

これと同等のことをここであげた計算法によると accintback を使って、

```
   accintback=:*/\. @ (,&1) @ (stretch >: @ intexpand)
   +/(0,(24#1)) * 24 accintback 0.1 5 0.09  NB.期末、年単位 (24 年間)
77.4088
   +/(0,(23#1)) * 23 accintback 0.1 5 0.09  NB.期末、年単位 (23 年間)
70.0998
   +/((24#1),0) * 24 accintback 0.1 5 0.09  NB.期首、年単位 (24 年間)
84.6895
   +/((23#1),0) * 23 accintback 0.1 5 0.09  NB.期首、年単位 (23 年間)
76.6968
```

月単位で計算してみると、面白いことが分かる (いずれも期末を使った)。

```
      accpay 1;12;0.1 5 0.09;24#1  NB. 期末、月単位
1.04504 2.19459 3.4591 4.85005 6.3801 7.99492 9.75507 11.6736 13.7649
16.0443 18.5289 21.2371 24.1891 27.4067 30.9139 34.7368 38.9037 43.4456
48.3963 53.7926 59.6746 66.0859 73.0742 80.6915
      _2{."0 1 accpay 1;12;0.1 5 0.09;24#1  NB. 期末、月単位
73.0742 80.6915
   +/((0,(288#1))%12) * 288 accintback (0.1%12),(12*5),(0.09%12)
85.383
```

年利の 12 分の 1 を使うと大き目にでてくる。
そこで実効値が年利に等しくなるように月利を決めると、

```
   +/((0,(288#1))%12) * 288 accintback (12 intm 0.1),(12*5),(12 intm 0.09)
80.6915
   +/((0,(276#1))%12) * 276 accintback (12 intm 0.1),(12*5),(12 intm 0.09)
73.0742
```

以上の検討によって accpay の月単位計算の金利は実効値、すなわち年利率で所定の率が得られるような月利を用いる場合に一致することが分かった。

現在価格 (ローン借入額、投資額) に直すために工夫した新しい関数 accintnew についての検討については次回以降に検討する。

【参考文献】

【1】J601 システムパッケージ (1994-2006)　：ファイナンスパッケージ、j601/system/packages/finance/interest.ijs 、j601_win.exe を解凍すると得られる

【2】竹内寿一郎（2010)：　財務計算あれこれ　第 1 回 __現価、終価、年価__、JAPLA 研究会 2010.1.23 資料

【3】竹内寿一郎（2010)：　財務計算あれこれ　第 2 回 __期間と利率の計算式__、JAPLA 研究会 2010.2.27 資料

【4】竹内寿一郎（2010)：　財務計算あれこれ　第 3 回 __内部利率の計算式__、JAPLA 研究会 2010.3.27 資料