

## 7にまつわる問題

統計数理研究所(名誉教授) 鈴木義一郎

7という数は極めて特徴的な数である。太陽暦では、7を周期に曜日が変わる。野球での7イニング目をなぜか「ラッキー・セブン」といって、得点の入るケースが多い。また日本でも77歳を「喜寿」といって、めでたいとしてお祝いをする。さらに女性に対しては、7は生涯のリズムと結びついている。7年間で2回やると「初経」、7年間で7回続くと「閉経」となる。また死者への崇拝として、7日目から(7×7=)49日目までを亡くなった人を偲んでの“供養”を行う。

古代オリエントの大きな川の数は、次の7つである：

ナイル川、チグリス川、ユーフラテス川、オクサス川、ヤクサル川、  
アラックス川、インダス川

また日本人は7人の幸福な神(7福神)をもっている：

布袋(慈愛に満ちた神)、毘沙門天(守り神)、福祿寿(長寿の神)、寿老人(学業の神)、  
大黒(栄養の神)、恵比寿(商業・漁業の神)、弁財天(音楽の神)

さて、7が極めて不思議な数であるというのは、次のような事実による：

7の逆数を無限小数で展開してみると

$$1/7 = 0.142857142857142857.....$$

のように、142857という数値がいつまでも循環して表れる。

一般に、整数の比で表される「有理数」を小数で表すとき、無限に続く場合でも、必ず同じパターンが繰り返し表れることが知られている。そこで、この繰り返しの部分の数値142857を2倍してみると

$$142857 \times 2 = 285714$$

となるが、この数は142857の3番目の数が先頭になるように同じ順番で並べ替えたものであることが分かる。

さらに、142857に3、4、5、6を掛けた結果も

$$142857 \times 3 = 428571, \quad 142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285, \quad 142857 \times 6 = 857142$$

のように、いずれの数も142857の順序を変えずに、適宜並べ替えた数値になっていることが確かめられる。

そこで、ある整数Nがこのような性質をもつときに、「Nは性質(C)をもつ」ということにする。

《142857のような性質(C)をもった数が他にあるのだろうか?》

<pre>3 :&lt;"0":y' s=:142857   1 4 2 8 5 7 (「:」は数値を文字化する演算子である。)</pre> <pre>3 :! .&lt;"0":y' s   4 2 8 5 7 1</pre>	<pre>]a=:3 :&gt;(i.#t)."0 1 t=.&lt;"0":y' s 142857 428571 285714 857142 571428 714285</pre>
<pre>". a 142857 428571 285714 857142 571428 714285 /:~". a 142857 285714 428571 571428 714285 857142</pre>	<p>左のボックスの結果より「6桁の整数142857は性質(C)をもつ」ことが確かめられた。</p>
<pre>order=: 3 :/::~.&gt;(i.#t)."0 1 t=.&lt;"0":y' ]n=:order 142857 142857 285714 428571 571428 714285 857142 ]m=: (multi=:3 :/::&gt;i.#":y)*{.y}' n 142857 285714 428571 571428 714285 857142</pre>	<pre>3 :'n-:multi order y' 142857 1 3 :'n-:multi order y' 142856 0</pre>

<pre>match=:3 :0 m=(i.#t)."0 1 t=.&lt;"0":y n -: (&gt;i.#t)*{.n=/:~".&gt;m )</pre> <p>「match」という関数はyが性質(P)をもてば1、そうでなければ0を出力する。</p>	<pre>find=:4 :0 s=.r#k [ r=.match k=.x while.(y-x)&gt;#r do.r=.r,match(k=.k+1) s=.s,({:r)#k end. )</pre>	<pre>find m=:4 :0 M. s=.r#k [ r=.match k=.x while.(y-x)&gt;#r do.r=.r,match(k=.k+1) s=.s,({:r)#k end. )</pre>
<pre>match"0(142856+i.3) 0 1 0</pre>	<p>「find」や「findm」という両側関数は、左引数から右引数までの整数で、性質(C)をもつ数値を出力する。</p>	

<pre>6!:2'f=:11 find 150000' 21.3093 f 142857</pre>	<pre>6!:2'fm=:11 findm 150000' 21.3064 fm 142857</pre>	<p>「11」から「150000」までの整数で、性質(C)をもつ数値は「142857」のみ。</p>
---	--	--

<pre>6!:2'f=:1.5e5 find 5e5'</pre>	<pre>6!:2'fm=:1.5e5 findm 5e5'</pre>	<pre>142857 * 2</pre>
------------------------------------	--------------------------------------	-----------------------

56.8814 f 285714 428571	58.7827 fm 285714 428571	285714 142857 * 3 428571
<p>「150000」から「500000」までの整数で、性質(C)をもつ数値として出力されたものは、「285714」と「428571」であるが、これらは「142857」を2倍、3倍したもので本質的には新発見ではない。つまり6桁の整数としては、唯の1個だけといえる。なお、「Virision 602」の「M.」の機能には、全く効果無し！むしろ用いないほうがベターである。</p>		

6!:2'f=(h-1e6)find h=:2e6' 201.543 6!:2'f=(h-1e6)find h=:3e6' 199.657	6!:2'f=(h-1e6)find h=:4e6' 204.967 6!:2'f=(h-1e6)find h=:5e6' 200.376	「1000000」から 「5000000」までで性質 (C)をもつ数値は1組も 無い。
--	--	--

6!:2'f=(h-5e6)find h=:1.5e7' 1143.86 6!:2'f=(h-5e6)find h=:2e7' 1167.95 6!:2'f=(h-5e6)find h=:2.5e7' 1178.67 6!:2'f=(h-5e6)find h=:3e7' 1164.91	6!:2'f=(h-5e6)find h=:3.5e7' 1174.2 6!:2'f=(h-5e6)find h=:4e7' 1182.06 6!:2'f=(h-5e6)find h=:4.5e7' 1151.14 6!:2'f=(h-5e6)find h=:5e7' 1173.41	「10000000」から 「50000000」までで性質 (C)をもつ数値は 1組も無い。
--	---	--

それでは、「8進数」の場合について調べてみよう。

<pre> degit=:1:+&lt;.@([^.1:&gt;./]) trans=(degit\$)#:] rotate=[:/:~i.@degit . "0 1 trans multi=:4 :0 d=.x degit y [ t=.{.x rotate y k#:(&gt;:i.d)*(k=.d\$x)#.t ) </pre>	8 degit 63 64 2 3	8 trans 689 1 2 6 1
	]A=:8 rotate 689	]B=:8 multi 689
	1 1 2 6	1 1 2 6
	1 2 6 1	2 2 5 4
	2 6 1 1	3 4 0 2
6 1 1 2	4 5 3 0	
A -: B 0	[659] <sub>10</sub> = [1261] <sub>8</sub> は、当然失格である。	

<pre> match8=:3 :'(8 rotate y)-:8 multi y'   find8=:4 :0 s=.r#k [ r=.match8 k=.x while.(y-x)&gt;#r   do.r=.r,match8(k=.k+1)     s=.s,({:r)#k end. ~.8([:&lt;rotate)"0 s ) </pre>	$10_8 \text{ } \$ \text{ } 8([:<trans)"0(i.16+8^2)$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>24</td><td>26</td><td>27</td></tr> <tr><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td></tr> <tr><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td></tr> <tr><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td></tr> <tr><td>100</td><td>101</td><td>102</td><td>103</td><td>104</td><td>105</td><td>106</td><td>107</td></tr> <tr><td>110</td><td>111</td><td>112</td><td>113</td><td>114</td><td>115</td><td>116</td><td>117</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20	21	22	23	24	24	26	27	30	31	32	33	34	35	36	37	40	41	42	43	44	45	46	47	50	51	52	53	54	55	56	57	60	61	62	63	64	65	66	67	70	71	72	73	74	75	76	77	100	101	102	103	104	105	106	107	110	111	112	113	114	115	116	117
0	1	2	3	4	5	6	7																																																																										
10	11	12	13	14	15	16	17																																																																										
20	21	22	23	24	24	26	27																																																																										
30	31	32	33	34	35	36	37																																																																										
40	41	42	43	44	45	46	47																																																																										
50	51	52	53	54	55	56	57																																																																										
60	61	62	63	64	65	66	67																																																																										
70	71	72	73	74	75	76	77																																																																										
100	101	102	103	104	105	106	107																																																																										
110	111	112	113	114	115	116	117																																																																										

6!:2'f=:9 find8 100000'  
21.4336

<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>f</td></tr> <tr><td>2 5   1 4 6 3</td></tr> <tr><td>5 2   3 1 4 6</td></tr> <tr><td>    4 6 3 1</td></tr> <tr><td>    6 3 1 4</td></tr> </table>	f	2 5   1 4 6 3	5 2   3 1 4 6	4 6 3 1	6 3 1 4	<p>8 8 #.2 5 21</p> <p>8 8 #.5 2 42</p>	<p>(4\$8)#.1 4 6 3 819</p> <p>(4\$8)#.3 1 4 6 1638</p> <p>(4\$8)#.4 6 3 1 2457</p> <p>(4\$8)#.6 3 1 4 3276</p>	<p>819*1 2 3 4 819 1638 2457 3276</p>
f								
2 5   1 4 6 3								
5 2   3 1 4 6								
4 6 3 1								
6 3 1 4								

<p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:2e5' 21.4326</p> <p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:3e5' 21.6232</p> <p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:4e5' 21.9571</p> <p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:5e5' 23.0757</p> <p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:6e5' 22.4563</p>	<p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:7e5' 22.6747</p> <p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:8e5' 23.1645</p> <p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:9e5' 23.1275</p> <p>6!:2'f=::(h-1e5)find8 h=:1e6' 22.8459</p> <p>6!:2'f=::(h-1e6)find8 h=:2e6' 273.361</p>	<p><math>[21]_{10} = [25]_8</math> <math>[819]_{10} = [1463]_8</math> の2組の他は無さそ うである。</p>
--	--	---

6進数の場合はどうか？

<pre> match6=:3 :'(6 rotate y)-:6 multi y'   find6=:4 :0 </pre>	<p>6!:2'f=:7 find6 10000' 2.12235</p>	<p>6進数の場合には 性質(C)をもつ数</p>
---	---	-------------------------------

<pre>s=.r#k [ r=.match6 k=.x while.(y-x)&gt;#r   do.r=.r,match6(k=.k+1)     s=.s,({:r)#k end. ~.6([:&lt;rotate)"0 s )</pre>	<pre>6!:2'f=:1e4 find6 2e4' 2.16309 6!:2'f=:2e4 find6 1e5' 17.5527 6!:2'f=:1e5 find6 1e6' 226.942 6!:2'f=:1e6 find6 1e7' 2570.4</pre>	<p>値は1組も検出されない。</p>
---	---	---------------------

9進数の場合はどうか？

<pre>match9=:3 :(9 rotate y)-.9 multi y' find9=:4 :0 s=.r#k [ r=.match9 k=.x while.(y-x)&gt;#r   do.r=.r,match9(k=.k+1)     s=.s,({:r)#k end. ~.9([:&lt;rotate)"0 s )</pre>	<pre>findm9=:4 :0 M. s=.r#k [ r=.match9 k=.x while.(y-x)&gt;#r   do.r=.r,match9(k=.k+1)     s=.s,({:r)#k end. ~.9([:&lt;rotate)"0 s )</pre>	
<pre>6!:2'f=:10 find9 100000' 20.1867 f</pre>	<pre>6!:2'f=:10 find9 1000000' 240.703 f</pre>	<pre>6!:2'f=:10 find9 1000000' 242.158 f</pre>

$1/7 = 0.142857142857142857$  は、循環節の個数が  $7 - 1 = 6$  である。

$1/17 = 0.0588235294117647$  は、循環節の個数が  $17 - 1 = 16$  である場合

$0588235294117647$  という数が性質(C)をもつことが確かめられる。

$1/13 = 0.076923076923$  は循環節の個数が6個なので、性質(C)をもたない。

他に、 $1/19$ 、 $1/23$ 、 $1/29$  など小数展開での循環節の個数は、それぞれ 18, 22, 28 個だから性質(C)をもつ。

『面白い計算術』ベレリマン著／金光不二夫約 東京図書(1960年)

《今年(西暦2009年)で平成21年、2009も21も7で割り切れる!》

ある数(n)の1位の数(t)の2倍をその前までの数(h)から引いた数(h-2t)が7で割り切れればnも7で割り切れる。	当初の数は「 $n = 10h + t$ 」と表されるから $n = 10h + t = 7h + 3(h - 2t) + 7t$ これより、(h-2t)が7で割り切れればnも7の倍数になることが分かる。
---	--

<code>next=:3 'x:h-+t [ "h t="."&amp;.&gt;({;{:)"y'</code>	nを入力すると「h-2t」を出力する関数		
<code>div=:3 :0 r=. t=. y while. 0&lt;t do. r=. r, t=. next t end. )</code>	next 2009 182	next 182 14	next 14 _7
	div 2009 2009 182 14 _7 _ div 22271627 22271627 2227148 222698 22253 2219 203 14 _7		

<code>]m1=:?10000 6147 div n1=:7*m1 43029 4284 420 42 0</code>	<code>]m2=:?100000 75158 div n2=:7*m2 526106 52598 5243 518 35 _7</code>	<code>]m3=:?1000000 754729 div n3=:7*m3 5283103 528304 52822 5278 511 49 _14</code>
<code>]m4=:?10000000 7523522</code>	<code>div n4=:7*m4 52664654 5266457 526631 52661 5264 518 35 _7</code>	
<code>]m5=:?100000000 65292732</code>	<code>div n5=:7*m5 457049124 45704904 4570482 457044 45696 4557 441 42 0</code>	
<code>]m6=:?1000000000 641323355</code>	<code>div n6=:x:7*m6 4489263485 448926338 44892617 4489247 448910 44891 4487 434 35 _7</code>	

1001 = 7 × 11 × 13 …………… シェエラザードの数

$]a=:?1000$ 158 $a * 1001$ 158158	$]b=:?1000$ 729 $b * 1001$ 729729	$]c=:?1000$ 522 $c * 1001$ 522522	$]d=:?1000$ 732 $d * 1001$ 732732
$158 \times 1001 = 158 \times (1000 + 1) = 158000 + 158 = 158158$			

$]a=:?100$ 73 $a * 10101$ 737373	$]b=:?100$ 58 $b * 10101$ 585858	$]c=:?100$ 69 $c * 10101$ 696969	$]d=:?100$ 34 $d * 10101$ 343434
$73 \times 10101 = 73 \times (10000 + 100 + 1) = 730000 + 7300 + 73 = 737373$			

$]a=:?10000$ 8546 $a * 10001$ 85468546	$]b=:?10000$ 3608 $b * 10001$ 36083608	$]c=:?10000$ 4375 $c * 10001$ 43754375	$]d=:?10000$ 4697 $d * 10001$ 46974697
---	---	---	---

$1 \times 9 + 2 = 11$ $12 \times 9 + 3 = 111$ $123 \times 9 + 4 = 1111$ $1234 \times 9 + 5 = 11111$ $12345 \times 9 + 6 = 111111$ $123456 \times 9 + 7 = 1111111$ $1234567 \times 9 + 8 = 11111111$ $12345678 \times 9 + 9 = 111111111$	$1 \times 8 + 1 = 9$ $12 \times 8 + 2 = 98$ $123 \times 8 + 3 = 987$ $1234 \times 8 + 4 = 9876$ $12345 \times 8 + 5 = 98765$ $123456 \times 8 + 6 = 987654$ $1234567 \times 8 + 7 = 9876543$ $12345678 \times 8 + 8 = 98765432$ $123456789 \times 8 + 9 = 987654321$	$123456789 \times 9 = 111111111$ $123456789 \times 18 = 222222222$ $123456789 \times 27 = 333333333$ $123456789 \times 36 = 444444444$ $123456789 \times 45 = 555555555$ $123456789 \times 54 = 666666666$ $123456789 \times 63 = 777777777$ $123456789 \times 72 = 888888888$ $123456789 \times 81 = 999999999$
--	--	--

$$1234 \times 9 + 5 = 1234 \times (10 - 1) + 5 = 12340 - 1234 + 5 = 12345 - 1234 = 11111$$