ルベリエ · ファディーエフ法の周辺

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2009 年 3 月 27 日

目次

概要

実対称行列の固有値や逆行列を求めるルベリエ · ファディーエフ法の構造を探るとともに、実対称行列のシューア変換を取り扱う。

初めに

特性方程式（特性多項式）の 2 次式は次のように表すことができる。この表現はルベリエ · ファディーエフ法で用いられている。

$detA - (traceA)t + t^2 = 0$

成分では

$(ad - bc) - (a + d)t + t^2 = 0$

これが 3 次式ではどのようになるのであろうか。

1　ルベリエ · ファディーエフ法

1.1　2 次式　$f = a + b\lambda$

1.1.1　記号処理

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$trace_0 = a + d \ (= trace)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ad+bc & ab-ab \\ -cd+cd & -ad+cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & -ad+cb \end{bmatrix}$$

整理すると$\dfrac{-2ad+2bc}{2} = -ad + bc$

$trace_1 = -ad + bc$ (注：$-\,det$ である)

LF 法

$f = -(det) - (trace)\lambda + \lambda^2$

$$, \begin{bmatrix} a \searrow & b \\ c \nearrow & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{a} & b \\ c & \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

1.1.2　計算過程

<table>
<tr>
<td>

```
a=. 1 1 ,: 2 4

   a
1 1
2 4
```

$trace_0 = 1 + 4 = 5 = \lambda$

</td>
<td>

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}$

```
 trace=:(<0 1)&|:

  (=/~i.#a) * +/ tr a
5 0
0 5
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

```
a mp a- (=/~i.#a) * +/ tr a
_4  1
 2 _1
```

</td>
<td>

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right)$

```
a mp a- (=/~i.#a) * +/ tr a
_2  0
 0 _2
```

$trace_1 = \frac{1}{2} \sum(-2, -2) = -2(= det)$

</td>
</tr>
</table>

$f = 2 - 5\lambda + \lambda^2$

Le Verrier Faddeev 法は係数の符号を逆転させる

```
   a
1 1
2 4
   char_lf a
+-+----------------+------+
|1|4.56155 0.438447|2 _5 1|
```

+-+---------------+-------+

1.2 3 次式 $f = a + b\lambda + c\lambda^2 + \lambda^3$

1.2.1 数式処理

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$trace_0 = a + d + i \ \ (trace = \lambda^2)$

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d+i & 0 & \\ 0 & a+d+i & 0 \\ 0 & 0 & a+d+i \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -d-i & b & e \\ c & -a-i & f \\ g & h & -a-d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(-d-i)+bc+eg & ab+b(-a-i)+eh & ae+bf+e(-a-d) \\ c(-d-i)+cd+fg & bc+d(-a-i)+fh & ce+df+f(-a-d) \\ g(-d-i)+ch+gi & bg+h(-a-i)+hi & eg+fh+i(-a-d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(-d-i)+bc+eg & -bi+eh & bf-de \\ -ci+fg & bc+d(-a-i)+fh & ce-af \\ -gd+ch & bg-ah & eg+fh+i(-a-d) \end{bmatrix}$$

対角行列を抜き出す

$a(-d-i)+bc+eg$

$+bc+d(-a-i)+fh$

$+eg+fh+i(-a-d)$

整理すると同じのが 2 個ずつ現れる。$\frac{1}{2}$を乗じて

$trace_1 = -ad - ai - di + bc + eg + fh = \lambda$

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a(-d-i)+bc+eg & -bi+eh & bf-de \\ -ci+fg & bc+d(-a-i)+fh & ce-af \\ -gd+ch & bg-ah & eg+fh+i(-a-d) \end{bmatrix}\right.$$

$$-\begin{bmatrix} -ad-ai-di+bc+eg+fh & 0 & 0 \\ 0 & -ad-ai-di+bc+eg+fh & 0 \\ 0 & 0 & -ad-ai-di+bc+eg+fh \end{bmatrix}\Bigg]\Bigg)$$

$$=\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} di-fh & -bi+eh & bf-de \\ -ci+fg & ai-eg & ce-af \\ -dg+ch & bg-ah & ad-bc \end{bmatrix}$$

λ の項は対角行列のみ計算する

1. $adi-afh-bci+bfg-egd+ceh$
2. $-bci+ceh+adi-deg+bfg-afh$
3. $bfg-deg+ceh-afh+adi-bci$

整理すると 2 個ずつのペアが出るので $\frac{1}{2}$ する。

$trace_2 = adi+bfg+ceh-deg-afh-bci = det$

$f = (adi+bfg+ceh-deg-afh-bci)+(-ad-ai-di+bc+eg+fh)\lambda+(a+d+i)\lambda^2+\lambda^3$
LF 法は
$f = -(det)-(\text{魚の中骨})\lambda-(trace)\lambda^2+\lambda^3$
となる

$$\begin{pmatrix} a\nwarrow & b\nwarrow & e\nwarrow\swarrow & a\swarrow & b\swarrow \\ c & d\nwarrow\swarrow & f\nwarrow\swarrow & c\nwarrow\swarrow & d \\ g\swarrow & h\swarrow & i\nwarrow\swarrow & g\nwarrow & h\nwarrow \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a\searrow & b & e & a \\ c\nearrow & d\searrow & f & c \\ g & h\nearrow & i\searrow & g \\ a & b & e\nearrow & a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathbf{a} & b & e \\ c & \mathbf{d} & f \\ g & h & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

`det`　　`bone fish`　　`lamda`

1.2.2　計算過程

A	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & & \\ 0 & 6 & \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right)$

<table>
<tr>
<td>

```
   C3
 2 _1 1
_1  2 1
 1 _1 2
```

$trace_0 = \sum(2,2,2) = 6 = \lambda^2$

</td>
<td>

```
 ] a=. (C3 char_lf1 C3) 1
_6  1 _3
 3 _8 _3
_1  1 _8
```

$trace_1 = \frac{1}{2}\sum(-6,-8,-8) = -11 = \lambda$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & & \\ 0 & 11 & \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \right) =$
$\begin{bmatrix} 6 & & \\ 0 & 6 & \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

</td>
<td>

```
 ] a=. (C3 char_lf1 a) 2
6 0 0
0 6 0
0 0 6
```

$trace_2 = \frac{1}{3}\sum(6,6,6) = 6$ NB. constant

</td>
</tr>
</table>

```
   C3
 2 _1 1
_1  2 1
 1 _1 2

  -/ . * C3  NB. determinant=constant
6

   char_lf C3
+-+-----+----------+
|1|3 2 1|_6 11 _6 1|
+-+-----+----------+
```

$-12 = -\sum(2,2),(2,2),(2,2)$
$1 = \sum(-1,-1),(1,1),(-1,1)$
$f = -6 + 11\lambda - 6\lambda^2 + \lambda^3$

2 ルベリエ · ファディーエフ法と逆行列

ルベリエ · ファディーエフ法の計算過程から逆行列が容易に得られる。

$A^{-1} = \frac{1}{p_n}(B_{n-1} - p_{n-1}I)$

2.1 2 次式

$$A^{-1} = \frac{1}{-ad+bc}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{-ad+bc}\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
   %. 1 1,:2 4
 2 _0.5
_1  0.5
```

2.2 3 次式

$trace_2 = adi + bfg + ceh - deg - afh - bci = det$ NB. P3

$$A^{-1} = \frac{1}{adi+bfg+ceh-deg-afh-bci}\left(\begin{bmatrix} a(-d-i)+bc+eg & -bi+eh & bf-de \\ -ci+fg & bc+d(-a-i)+fh & ce-af \\ -gd+ch & bg-ah & eg+fh+i(-a-d) \end{bmatrix}\right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} -ad-ai-di+bc+eg+fh & 0 & 0 \\ 0 & -ad-ai-di+bc+eg+fh & 0 \\ 0 & 0 & -ad-ai-di+bc+eg+fh \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{det\,A}\begin{bmatrix} di-fh & -bi+eh & bf-de \\ -ci+fg & ai-eg & ce-af \\ -dg+ch & bg-ah & ad-bc \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{matrix}$	$\begin{array}{c\|cccc} a & b & e & a & b \\ \hline c & d & f & c & d \\ g & h & i & g & h \\ a & b & e & a & b \\ c & d & f & c & d \end{array}$	`}.}."1 |: 5 5 $`
		`'abeabcdfcdghighabeabcdfcd'`
		$\begin{bmatrix} d & h & b & d \\ f & i & e & f \\ c & g & a & c \\ d & h & b & d \end{bmatrix}$

この組み合わせで右から $difh, cifg$ のように 4 個ずつ 9 セットの det が取れる。横にとって行きマトリクスを最後に転置して $\dfrac{1}{det\,A}$ をかける。

$$\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -11 & & \\ 0 & -11 & \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
  1 x: %. C3
 5r6 1r6 _1r2
 1r2 1r2 _1r2
_1r6 1r6  1r2
```

2.3　3 × 3 の逆行列の手計算

思いつくままにマトリクスを作って逆行列を手計算で求めてみよう。(3￥*times*3 までは手計算が可能)

行列式は薩摩示現流左八艘から右八艘へと移る

```
   3 2 5,6 2 7,:4 1 3
3 2 5
6 2 7
4 1 3
```

<table>
<tr>
<td>$$\begin{matrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{matrix}$$</td>
<td>

$Trace$

$3+2+3=8$

$determinant$

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

$3\times 2\times 3+2\times 7\times 4+5\times 6\times 1-(5\times 2\times 4+3\times 7\times 1+2\times 6\times 3) = 18+56+30-(40+21+36)=7$

</td>
<td>

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 6 & 2 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 2 \end{array}$$

$2\times 3-(7\times 1) \quad = -1$
$1\times 5-(3\times 2) \quad = -1$
$2\times 7-(5\times 2) \quad = 4$

$7\times 4-(6\times 3) \quad = 10$
$3\times 3-(4\times 5) \quad = -11$
$5\times 6-(3\times 7) \quad = 9$

$6\times 1-(2\times 4) \quad = -2$
$4\times 2-(1\times 3) \quad = 5$
$3\times 2-(2\times 6) \quad = -6$

転置して $det=7$ で割る

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 4 \\ 10 & -11 & 9 \\ -2 & 5 & -6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1/7 & -1/7 & 4/7 \\ 10/7 & -11/7 & 9/7 \\ -2/5 & 5/7 & -6/7 \end{matrix}$$

</td>
</tr>
</table>

```
   -/ .* a
7

  1 x:  %. a
_1r7  _1r7  4r7
10r7 _11r7  9r7
_2r7   5r7 _6r7
```

3　シューア変換

実対称行列を上三角行列に変換する方法にシューア分解がある。例題の 3×3 行列は 3 重根で、ノルム化した後に残るベクトルは 1 本のみであって、まさに「包丁一本晒しに巻いて」である。

`A2`
`6 4 _3`
`1 4 _1`
`4 5 _1`
	`char_lf A2`
	`+-+-----+-----------+`
	`|1|3 3 3|_27 27 _9 1|`
	`+-+-----+-----------+`
		`char_evec0 A2`
		`+------+-----+------+`
		`|1 1 _1|1 1 _1|1 1 _1|`
		`|0 0  0|0 0  0|0 0  0|`
		`|1 1 _1|1 1 _1|1 1 _1|`
		`+-----+-----+------+`

*1

3.1　部品の作成

3.1.1　ノルム化

縦ベクトル　ベクトルは縦ベクトルを基本とする。関数によっては縦積み（横ベクトル）で働くものもあるので、トランスポーズ `(|:)` を行う。

clean　`~.` で重複が排除できるが 0 にゴミが残っていると正確さが損なわれる。*numeric.ijs* に入っている *clean* で掃除する。

$\parallel u \parallel = \sqrt{\sum 6^2, 1^2, 4^2}$	`%: +/  ^&2 ] 6 1 4` `7.28011`
$\dfrac{u_1}{\parallel u_1 \parallel} = \dfrac{6\ 1\ 4}{\sqrt{\sum 6^2, 1^2, 4^2}}$	`6 1 4 % (%: +/  ^&2 ] 6 1 4)` `0.824163 0.137361 0.549442`
	`norm0 6 1 4` `0.824163 0.137361 0.549442`

3.2　グラム · シュミットの直交化

*1 I.Schur (1875-1941)

$$v_1 = x_1$$
$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 v_1}{v_1 v_1} v_1$$
$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{x_3 v_2}{v_2 v_2} v_2$$
$$\cdots$$
$$v_p = x_p - \frac{x_p v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{x_p v_2}{v_2 v_2} v_2 - \cdots - \frac{x_p v_{p-1}}{v_{p-1} v_{p-1}} v_{p-1}$$

グラム・シュミットの直交化は J の 128!:0 にノルム化されたものが入っている。ここではノルム化しないものを作成した。多少ゴチャゴチャしている。

```
   A3
1 1  2
1 0 _1
0 1  1
   norm2 gs0 A3
0.707107  0.408248  0.57735
0.707107 _0.408248 _0.57735
       0  0.816497 _0.57735
```

3.2.1 0 ベクトルの取り除き

ノルム化すると 0 ベクトルが出ることがあるので除く。

```
removeZero=: 3 : '(-.NR = +/"1 (clean y) e. (NR=.{:$y)# 0)# y'
NB. remove  0 0 0
```

3.2.2 直交ベクトル

マトリクスのサイズ分の直交ベクトルが無いときに乱数から作成する。重複や 0 ベクトルを慎重に除く。

Examole A2 は 固有値は 3 の 3 重根でこ固有ベクトルは 1 本のみである。

```
A2;  ~. open2 char_evec0 A2
+------+------+
|6 4 _3|1 1 _1|
|1 4 _1|0 0  0|
|4 5 _1|      |
+------+------+
 A2       evec
```

乱数から任意のベクトルを作成し、直交化とノルム化を行う。

```
  fo A2
 0.57735 0.293294  0.762001
 0.57735 0.513265 _0.635001
_0.57735 0.806559     0.127
```

3.3　シューア分解

3 × 3 のマトリクスの場合マトリクスの各固有値から取った 3 本の直交ベクトルがあれば一気に対角化ができる。シューア変換は一個の固有値にかかる 1 本のノルム化された固有ベクトル (X_1) とこれに直交するノルム化された 2 本のベクトル (W_2, W_3) を用いる。ジョルダン標準形の様に大げさでなく、シューア変換は *Example A*2 の場合でも可能である。

$T_1 = [X_1, W_2, W_3]$

$$T_1^t A T_1 = \begin{array}{c|cc} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} \\ \hline 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{array} = \begin{array}{c|c} \lambda_1 & b^t \\ \hline 0_2 & A_2 \end{array}$$

A_2 以下に同じ作用を 2 × 2 まで行う。T_2 の首座に 1、他を 0 を付加しサイズを戻す。

$$T_2 = \begin{array}{c|c} 1 & 0_2^t \\ \hline 0_2 & S_2 \end{array}$$

変換マトリクスを作成する。

$U = T_1 T_2$ NB. ユニタリマトリクス

シューア変換

$U^t A U$

[*2]

```
  shur0 A2
+------------------------------+-----------------+
| 0.57735 _0.408248     0.707107|3 2.12132 9.38971|
| 0.57735  0.816497 _2.08167e_16|0       3  1.1547|
```

[*2] 対角化のフォームは $U^{-1}AU$ である。直交行列であるので逆行列と転置は同一

```
|_0.57735  0.408248     0.707107|0       0       3|
+-------------------------------+-----------------+
```

```
    char_lf A2
+-+-----+-----------+
|1|3 3 3|_27 27 _9 1|
+-+-----+-----------+
 char_lf ;{: shur0 A2
+-+-----+-----------+
|1|3 3 3|_27 27 _9 1|
+-+-----+-----------+
```

4 QR 分解

グラム · シュミットの直交化を用いて QR 分解が可能である。

```
tmp;clean (|: tmp=. norm2 gs0 A2) +/ . * A2
+-----------------------------+--------------------------+
|0.824163 _0.389867 _0.410803|7.28011 6.59331   _3.15929|
|0.137361  0.841291  _0.52284|      0 3.67808 _0.0461684|
|0.549442  0.374477  0.746914|      0       0    1.00833|
+-----------------------------+--------------------------+
     GS 変換                           QR decomposition
```

```
   128!:0 A2
+-----------------------------+--------------------------+
|0.824163 _0.389867 _0.410803|7.28011 6.59331   _3.15929|
|0.137361  0.841291  _0.52284|      0 3.67808 _0.0461684|
|0.549442  0.374477  0.746914|      0       0    1.00833|
+-----------------------------+--------------------------+
```

```
  clean mseval ^:(100000) A2
   3.00006    _1.15497  9.38979
1.55831e_9           3 _2.12083
         0 8.48861e_10  2.99994
```

QR 分解の左右の内積を何十回か反復して求めると対角行列が固有値に収束する。(この Example は収束が遅い)

```
NB. --------QR method tacit---------------------------
rheval=:+/ .*&>/@|.&(128!:0) NB. Roger Hui
rh=: [: (<0 1)&|: rheval ^:_

mseval=:(>&(1&{) +/ .* >&(0&{))&(128!:0)  NB. M. Shimura
ms=:[: (<0 1)&|: mseval ^:_
```

5 Reference

町田、駒崎、松浦「マトリクスの固有値と対角化」東海大学出版会 1990
Download
J Language `http://www.jsoftware.com`
Script `http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue/`

4 次式 $a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + \lambda^4$

4 次式についても LF 法の過程を確認するため記号処理を行ってみた。相当複雑であり、手計算での求根も難しい。

$$\begin{bmatrix} a & b & e & j \\ c & d & f & k \\ g & h & i & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$trace_0 = a + d + i + p = \lambda^3$

$$\begin{bmatrix} a & b & e & j \\ c & d & f & k \\ g & h & i & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b & e & j \\ c & d & f & k \\ g & h & i & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d+i+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+d+i+p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+d+i+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+d+i+p \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & e & j \\ c & d & f & k \\ g & h & i & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d-i-p & b & e & j \\ c & -a-i-p & f & k \\ g & h & -a-d-p & l \\ m & n & o & -a-d-i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(-d-i-p)+bc+eg+jm & b(-i-p)+eh+jn & bf+e(-d-p)+jo & bk+el+j(-d-i) \\ c(-i-p)+fg+km & bc+d(-a-i-p)+fh+kn & ce+f(-a-p)+ko & cj+fl+k(-a-i) \\ g(-d-p)+ch+lm & bg+h(-a-p)+ln & eg+fh+i(-a-d-p)+lo & gj+kh+l(-a-d) \\ m(-d-i)+cn+go & bm+n(-a-i)+ho+ & em+fn+o(-a-d) & mj+kn+lo+p(-a-d-i) \end{bmatrix}$$

$(diag)$

$a(-d-i-p)+bc+eg+jm$

$+ bc+d(-a-i-p)+fh+kn$

$+ eg+fh+i(-a-d-p)+lo$

$+ jm+kn+lo+p(-a-d-i)$

同じのが 2 個ずつ現れる。$\frac{1}{2}$を乗じて

$trace_1 = -a(-d-i-p)+d(-i-p)-ip$

$+ bc+eg+fh+jm+kn+lo = \lambda^2$

$6+6$ 個

$$\begin{bmatrix} a & b & e & j \\ c & d & f & k \\ g & h & i & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \times$$

$$\left(\begin{bmatrix} a(-d-i-p)+bc+eg+jm & b(-i-p)+eh+jn & bf+e(-d-p)+jo & bk+el+j(-d-i) \\ c(-i-p)+fg+km & bc+d(-a-i-p)+fh+kn & ce+f(-a-p)+ko & cj+fl+k(-a-i) \\ g(-d-p)+ch+lm & bg+h(-a-p)+ln & eg+fh+i(-a-d-p)+lo & gj+kh+l(-a-d) \\ m(-d-i)+cn+go & bm+n(-a-i)+ho+ & em+fn+o(-a-d) & mj+kn+lo+p(-a-d-i) \end{bmatrix} \right.$$

$$-\begin{bmatrix} D & 0 & & \\ 0 & D & & \\ 0 & 0 & D & \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}\Bigg) = \begin{bmatrix} a & b & e & j \\ c & d & f & k \\ g & h & i & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} ad(-i-p) - aip + afh + akn + alo & bc(-i-p) + bfg + blm \\ cb(-i-p) + ceh + cjn & da(-i-p) - dip + deg + djm + dlo \\ gbf + ge(-d-p) + gjo & hce + hf(-a-p) + hko \\ mbk + mel + mj(-d-i) & ncj + nfl + nk(-a-i) \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} eg(-d-p) + ech + elm & jm(-d-i) + jcn + jgo \\ fbg + fh(-a-p) + fln & km(-a-i) + kh0 + kbn \\ ia(-d-p) - idp + ibc + ijm + ikn & lem + lfn + lo(-a-d) \\ ogj + ohk + ol(-a-d) & pa(-d-i) - pdi + pbc + peg + pfh \end{matrix} \right)$$

ここで

$D = a(d-i-p) - d(-i-p) - ip + bc + eg + fh + jm + kn + lo = \lambda^2$

$ad(-i-p) + afh + akn + aloda(-i-p) - dip + deg + djm + dloia(-d-p) - idp + ibc + ijm + iknpa(-d-i) - pdi + pbc + peg + pfh$

整理すると

$$trace_2 = -adi - adp - aip - dip + \frac{afh + akn + alo + deg + djm + dlo + ibc + ijm + ikn + pbc + peg + pfh}{3} = \lambda$$

$-adi - adp - aip - dip$.......(1)

$+ \dfrac{afh + akn + alo}{3}$....(2)

$\dfrac{deg + djm + dlo}{3}$......(3)

$\dfrac{ibc + ijm + ikn}{3}$........(4)

$\dfrac{pbc + peg + pfh}{3}$........(5)

(1) $\rightarrow a \times -dip +$ (3)(4)(5)

(2) $\rightarrow d \times -aip +$ (2)(4)(5)

(3) $\rightarrow i \times -adp +$ (2)(3)(5)

(4) $\rightarrow p \times -adp +$ (3)(4)(5)

続けていくと Determinant が現れる。

λ の項は対角行列のみ計算する (trace)

整理すると λ の係数となる

$f = -(det) - (\cdots)\lambda - (\cdots)\lambda^2 + (trace)\lambda^3 + \lambda^4$