方程式 X^P = P^X の有理数解は？

Rational Solution of the Equation above

中野嘉弘（札幌市南区、 86 歳）

NAKANO Yoshihiro (Sapporo, JAPAN)

yoshihiro@river.ocn.ne.jp FAX 専 011-588-3354

つまらぬ数値計算と思いきや、なんと、ランベルト Lambert 関数 とか高級な話に繋がるらしい。

0. はしがき

Yahoo 知恵袋なる面白い Web 番組がある。 歴史部門や数学・物理部門が中々、有益である。 十日ほど前(Sep/ 9/16:47) に、表題の如き質問が出て、その回答が、なんと、たった 5 時間後(21:02)に、ベスト・アンサー BA を獲得した優秀な人が居た。
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1130422801

しかし、私(中野)としては、納得出来兼ねる点があったので、自問自答の形で、新質問者として、批判回答を仰ぐべく、再度、話題を提供した事件(?)があった。 現時点では、未だ、進行中の問題である。
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1130541381

簡単なことで申し訳ないが、JAPLA 諸賢からもお知恵拝借したいと思い(最後の広尾研究会向けに)投稿します。 宜しく！

1. 原質問

質問日時: 2009/9/9 16:47:46

▼「x^3=3^x は有理数の解を x=3 しか持たないことを証明しなさい。よろしくお願いします」

・ 補足 logx/x のグラフを書くと 2<x<e の間にも解があるのですが、これが無理数であることを示せません…。

● BA に選ばれた回答 from shentechs さん、日時:2009/9/9 19:03:24

x ≦ 0 だと、x^3 ≦ 0 < 3^x なので、x > 0 の場合だけ考えます。

a , b を互いに素な自然数とし、(a/b)^3 = 3^(a/b) とします。

両辺を b 乗して、(a/b)^3b = 3^a ⇔ a^(3b) = 3^a・b^(3b)

両辺は整数で、右辺が3の倍数なので左辺も3の倍数です。

a =c･3^n (c は3の倍数ではない)とおくと、n ≧ 1 なので、b と a は
互いに素という仮定から、b は3の倍数ではありません。

3^(3bn)･c^(3b) = 3^a･b^(3b) となり、両辺の3の素因数の個数を比べて、
3bn = a となります。

a/b = 3n なので、x = 3 , 6 , 9 , 12 , …… , 3n , ……
の場合に 3^x = x^3 が成り立つかどうかを調べればよいのですが、
x > 3 のとき、常に x^3 < 3^x が成り立つので、
3^x = x^3 の有理数解は x=3 だけです。

▲ 質問した人からのコメント 日時:2009/9/9 21:02:40
よく分かりました。
全く同じようにして x^p=p^x(p は素数)の有理数解は x=p しかないと言えそうです。

◆ BA から外れた解 (nakanochurch さん)、 日時:2009/9/9 19:50:54

与式、x^3=3^x から x = 3^(x/3) ･･･ (1)。
n = 1, 2, 3, 4 ･･･ として x = 3･n ･･･(2) と置く。
3･n = 3^n から n = 3^(n-1) ･･･ (3) を得る。
n = 1 の時、(3)式は成立する。x = 3 の時である。
左辺で n が、2, 3, 4 ･･･と、1 づつ増加する時、
右辺は 3 倍づつ増加するので、等号が成立する事は無い。

次に n を -1 づつ減少させる。
n = 0 では、(3) 式は 0 = 1/3 となり、等号は不成立。
さらに -1 すれば、-1 = 3^(-2) = 1/9、左辺は負数、
右辺は正数であるから、等号は不成立。
また、その先でも、不成立。

即ち、等号が成立するのは、最初の n = 1、即ち、
x = 3 の場合に限る。
(少々、ぎこちないかな?)

2. 再 質 問

質問日時 2009/9/12 21:29:06 from nakanochurch

「方程式 x^p=p^x の有理数解 x を求めよ。今は p=3 とする。」
なる質問が先日の知恵袋にあった(2009/9/ 16:47、解決 9/9 21:02)。
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1130422801

すでに解決済みらしく見えるが、もっと考察すると面白そうなので、質問の形
で、再論を引き出したい。 これまでの話は、次の2件である。

1) 原質問者は、有理数解は唯 1 つ と考え、その証明を求めている。
(回答者、2 人あり。)

2) グラフ的には、解が2ケ ありそうだが、無理数解らしい?ので除外する
とも、先の原質問者は述べている。

さて、私(新・質問者)の描いた上記 2) の件のグラフを下掲(本稿末尾?)

するが、解は確かに 2ケ ある。一体、この原質問の真の意味は何か？

私は考える。

● 3) 原質問者の云う唯一つの有理数解とは、トートロジー的 な自明解に過ぎない。
即ち、x^3 = 3^x の解が x = 3 とは、まさに、そうである。
私の質問形式 x^p=p^x で云えば、x = p が、いつでも解である。
整数、分数、無理数、超越数・・・ などに関係なく tautological な話だ。

● 4) グラフ的に見出された、非自明的な解は、p = 3 にたいして、
私の数値解では、x = 2.478052680288461
有理数表示では x = 1696072511786r684437633339 (r は分数記号)
でした（有効数字 16 桁の範囲での有理数解はこれ）。
グラフの図は、画像取り込みの都合上、本稿末尾に示す。

5) p= 2,3,4,5, ・・・・・・・・・100, ・・・・・・・では、解は 2ケ
が可能であるが、p<1 例えば、p = 1/3 では、自明解のみになるようだ。

と云う訳で、この問題の求解は、面白い問題かも知れぬ？ と提案します。

（以上の数値計算には、カナダ産の一般電算言語 J を利用しました。 これは、
www.j.com から無料で DL 可能です。 日本での研究団体は慶応大学理工学部
辺りにあります。）

★ 対する 新回答 from h1koki さん、日時:2009/9/12 23:27:14

ん？あの証明で十分だと思うが。

>さて、私（新・質問者）の描いた上記 2) のグラフを下掲するが、解は確かに
>2ケ ある。一体、この原質問の真の意味は何か？

いや、だから、非自明解が無理数で有る事かどうかが焦点でしょ。
これは回答者の証明でなんら問題はない。

ちなみにその非自明解を具体的に表すと、
x = -3W(-1/3*log3)/log3 ・・・・・ (h)
W はもちろんランベルト関数のこと。 （以上）

3. J 言語 による 計算

（ランベルト関数などの情報を得る以前の計算である。）

「原理」 与式 x^p = p^x の両辺の対数をとり、
p・log x = x・ log p から x = (p % log p)・log x 故
f(x) = x - (p % log p)・log x の 零点 を探せばよい。

「関数定義」

```
       Lpx =: 3 : '(y % ^. y)'
  Fpy=: 3 : '(Lpx0 *^. y) - y'

 Fpyb=: 3 : 'y - (Lpx0 *^. y) ' NB. Fpy と符号が違うのみ。

  lim =: ^:_
```

```
Newton =: 1 : '] - x % x D.1' (^:_) ("0)

load 'plot'

plot (]; 関数名) steps 始点 終点 分割数
```

「計算」p =. 3 (方程式 x^3=3^x の求解) の場合。

○ 第 1 の解:

```
]Lpx0=. Lpx 3 -> 2.73072
Fpy 3 -> 4.44089e_16 = 0
```

方程式を満たす。 解である。

ただし、これは、明らかに！ 自明解である。

自明解でも、この程度の計算残差があるのだ。 記憶に留めよ！

● 第 2 の解は？

```
Fpy Newton 2 -> 2.47805
```

(始点 2.71 以下では Fpy Newton 2.71 -> 2.47805 の如く

ここに収束する。)

```
Fpy 2.47805 -> _2.73287e_7 ≒ 0
```

より詳しくは(既報の如く)

```
Fpy 2.478052680288461 -> 1.64313e_14 = 0
```

その有理数表示 は

```
x: 2.478052680288461 -> 5602488517847r2260843186431
x: Fpy 5602488517847r2260843186431 -> 1r562949953421312
```

(有効数字 15 桁の範囲内での有理数解とも云えようか？)

求解のグラフの表示法は

```
plot (]; Fpy) steps 2 4 200
```

グラフの実例は下掲 (電子版では、本稿末尾に挿入)。

4.　p = 3　以外　での非自明解

```
p = 4:
   ]Lp14=. Lpx 4 -> 2.88539
   ]Lpx0=. Lp14  -> 2.88539
    Fpy 4 -> 0
```
自明解。
```
    Fpy Newton 4 -> 4
    Fpy Newton 3  -> 4
    Fpy Newton 2  -> 2
    Fpy 2 -> 0
```
非自明解

何故なるか？ Lpx 2 -> 2.88539 = Lpx 、同じだ。
こう云う時には、こうなる。
根 4 と 2 は共役解である。

```
p = 5:
   Fpy Newton 3 -> 5j_5.14733e_22 = 5
```
自明解へ収束。
```
   Fpy Newton 2.7 -> 1.76492
  Fpy 1.7649219145 -> _1.95957e_11 = 0
```

即ち、非自明解は 1.7649219145 =
その有理数表示は 3382341138977r1916425373349 。

p = 2:　共役解 p= 4　と。

p = 1:　log 1 の発散問題あり、特異点につき除外。

```
p = 1.2:
   ]Lp12=. Lpx 1.2 -> 6.58178
   ]Lpx0=. Lp12    -> 6.58178
   Fpy 1.2 ->  0
```
自明解。
```
    Fpy Newton 1 ->  1.2
   Fpy Newton 0.5 ->  1.2
```
へ収束。
```
   Fpy Newton _0.1 -> 1.2j_3.77237e_28 = 1.2
```
へ収束。

```
   Fpy Newton _0.5 -> 19.5763j_6.30569e_23 = 19.5763
```
。
```
   Fpy 19.5763 -> 1.14568e_5 ≒ 0
```
非自明解が 19.5763 付近にある。
```
       Fpy Newton 20 -> 19.5763
```
へ収束。
なお、Fpy Newton 0.1 -> 1.2　へ収束。

```
  p = 1.1:
   ]Lp11=. Lpx 1.1 -> 11.5413
   ]Lpx0=. Lp11 -> 11.5413
  Fpy Newton 2 -> 1.1
  Fpy Newton 20 -> 43.5577
  Fpy Newton 50 -> 43.5577
```

Fpy 1.1 -> 0
Fpy 43.5577 -> 3.07068e_5 ≒ 0

より詳しくは

Fpy 43.5577417759 -> 5.56355e_12 = 0 、

根の有理数表現は 1.1 = 11r10 と
43.5577417759 = 1321165339649r30331355249。

同様にして、
p = 0.5 では 解は 自明解 0.5 のみで、他に非自明解は
見えぬ。
0< p < 1 では、自明解 p 以外では、他に非自明解は
見えぬ。

★ p = e = 2.71828・・・・・ = 自然対数の底 base の
時には、同様に自明解しか無い。 何故か！？ 実数解では
の意味か？ 今後の課題かも知れない？

5. Lambert 関数

前節 2. の末に、 h1koki さんの回答に触れた。
ランベルト関数なる新顔が紹介されて面食らった。
数学ソフト Mathematica の Wolfram の関係の ワイスマンの
大著（文献 1） を調べた。 下記の如き項目が見えた。

● Lambert's Transcendental Equation

Lambert (1758)
Euler (1779)

x^α - x^β = (α - β)v x^(α+β)

ln x = v x^β

x = exp{ - (W(-βv)/β}

where W(x) Lambert's W-function

● Lambert's W-function

f(W) = W e^W

ただし、2.節末尾の式 (h) との関係が、未だ、しっくりしない。
計算自身は J 言語流で満足出来るので、今云える事は、
W = log[e] (1/p) である限り、
f(x) = x - (p/log p) W は、 x = p なる 自明解を持つ。
詳細は後日に再論しよう。

5.　むすび

Ｊ 言語の PR をする羽目になりました。無料 DL 後、初心者のチュートリアルのサービスが大切だろう。
2．節の末尾の「慶応大学理工学部辺り」を、何とか旨く、表現出来たら良いなと思います。

文　献

1) Eric W. Weisstein " CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICS 2nd Ed." Chapman & Hall/CRC 2003 p. 1684