群論演習　と　J（その 2)

Yahoo 知恵袋の問答から

中野　嘉弘　（札幌市、86歳）

FAX 011-588-3354、　E- mail yoshihiro@river.ocn.ne.jp

1.　は　し　が　き

JAPLA 4月の研究会の後、 Yahoo 知恵袋に、次のような質問が出された。
「位数 48 の群が可解であることを証明せよ」の解答を求む！
order 48　の　group が　solvable (soluble, lösbar) である事の
証明である。

既に知られている事に、　対称群 Ｓn は、n <= 4 ならば「可解」であり、
n >= 5 ならば、「可解でない」　がある。　代数方程式の解（根の公式）が、
4 次までで、5 次以上は「加減乗除と根号計算では解けない」事が、天才児、
ガロア　Galoi の名と共に、周知である。
その類の話であるから、ひょっとすると、次数 48 の代数方程式は、所謂、
「解ける」と云う事かも知れぬと、興味がそそられた。

ガロアと並ぶ天才にアーベルが居る。　その名を冠するアーベル群は、
「可換群」つまり、群操作（演算）の順序を交換しても同じであるもので、
可換群の時は、問題は素直（判り易い、解答し易い）になる。
今の「可解群」は、それに次ぐ程度に、取扱い易い群なのだそうだ。
（詳しくは、その中間に、「ベキ零群 nilpotent group 」なる概念が
挿入されるのだそうだ。　ベキ零群は可解群であるが、逆は成立せず。
たとえば、3次対称群は可解であるが、ベキ零群では無い。）
その可解群を定義するには、「交換子群」の定義を先にする必要が
ある。　前稿は、それに言及しかけたところまでであった。

(　前稿再録　　7．　　正規部分群（不変部分群）　)

岩波講座　応用数学 11 ［基礎8］群と表現：江沢　洋・島　和久　p.14（文献 7）に
面白い記述がある。

● Normal Sub-Group, 正規部分群、不変部分群、Invariant Sub-Group
N =　i,　a9, a10, a11
　=　|1|2|3|4| ,　|2 1|4 3|,　|3 1| 4 2|,　|3 2| 4 1|

4次の場合に限り、交代群（対称群）は正規部分群を持つと云われているが、その例である。

本によっては、一般的に次のようにも書く。

Ｎ　＝　Ｉ，(1 2)(3 4)，(1 3)(2 4)，(1 4)(2 3)

ｷ　正規部分群を持たない群を単純(Simple)と云う。　5 次交代群は単純群であり、従って可解群では無い。
●与群Gから正規部分群を作る方法に交換子(commutator)法がある。　かくして出来る群を交換子群と云う。
段々、尤もらしくなってきた。　次回にゆっくりやろう。　（前稿再録終わり）

2.　交 換 子 群

「交換子」は commutator である。　その定義は、入門書（文献３）によれば、
定義：　群 G の要素 x，y から、その逆元 x(-1)，y(-1) について、
xyx(-1)y(-1)　の形の元全体から生成される、G の部分群を G の交換子群と云い、記号、[G,G] で表す。
注意：　xyx(-1)y(-1)　の形の元を、有限個、掛け合わせた集合から成る群である。

性質：　1) 可換（アーベル）群の交換子群は要素 1 のみからなる。
（証明１）　全要素について　　xy = yx　から、　xyx(-1)y(-1)= 1 が成立。

2) [G,G] は　G の正規部分群である。
（証明２）　x ∈ G,　aba(-1)b(-1) ∈ [G ,G]　について
x(aba(-1)b(-1))x(-1) ＝
(xax(-1))(xbx(-1))((xax(-1))(-1)) ((xbx(-1))(-1)) ∈ [G ,G]

3) 剰余群　G/ [G ,G] は可換（アーベル）群である。
(証明3) [x],[y] ∈ G /[G ,G] に対して、
[x][y][x](-1)[y](-1)= [xyx(-1)y(-1)] ∈ [[G ,G]] = 1
より、[x][y] = [y][x] なので可換。

5) N がG の正規部分群で、N による G の剰余群 G / N が可換群ならば、
N は[G,G] を含む。　即ち　[G,G] ⊂ N　である。
(証明4) G / N が可換群ならば、[x],[y] ∈ G / N に対して
[xyx(-1)y(-1)] = [x][y][x](-1)[y](-1) = 1　より
xyx(-1)y(-1) ∈ N と成る。　それ故、G,G] ⊂ N　。

しかし、ゴタゴタしていて判り難い。

3.　交換子　と　J

6) 交代群　Ａｎ の　交換子群の例：
［Ａ2，Ａ2］= 1
［Ａ3，Ａ3］= 1

7) ［Ａ4，Ａ4］=　Klein の 四元群 V4
1 に収束する部分群列を持つので可解群である。

3)　n ≧ 5　 に対して　　［An, An］= An
An（n ≧ 5 ）が単純（1 に収束する部分群列を持たぬ）なので、
可解では無い。

4) 4元数群　Quaternion group　Q = {1, -1, i, -i, j, -j, k, -k}
ただし、ij=-k, ji=k, ii=-1, i(-i)=1　etc　について、
交換子群　[Q, Q] = {１, -1} = Ｚ２　である。

5)　対称群　Ｓn　の交換子群は　交代群　An　である。
［Ｓn, Ｓn］=　An
An　(n ≦ 4) は可解であるから、そこまでは　Ｓn も可解である。
n ≧ 5 に対しては、共に、非可解。

理解にはやって見るのが最善だ。 それには、群の乗積表を作るのが良い。

○１)　2次対称群　S2 ={単元 e, (1 2) } 故、　交代群 A2 = {e}。
故に、交換子群 [A2, A2] = {e} = 1。

3 次交代群　A3 = { E, S, T }、　E = (1 2 3), S = (2 3 1),
T = (3 1 2)。　　Ｊ 言語 で乗積表を作ろう。
ベクトル　V =.　1 2 3　とする。　Ｊ 言語の原点 0 を考慮して、
e =. ((1 2 3) – 1) -> 0 1 2 として、e { v -> 1 2 3　単元。
s =. ((2 3 1) – 1) -> 1 2 0として、 s { v -> 2 3 1、
t =. ((3 1 2) – 1) -> 2 0 1として、 t { v -> 3 1 2　。
s {(s { v } -> s { 2 3 1 -> 3 1 2 = tと同じ効果。
t {(t { v } -> t { 3 1 2 -> 2 3 1 = s と同じ効果。
t {(s { v } -> t { 2 3 1 -> 1 2 3 = eと同じ効果。
s {(t { v } -> s { 3 1 2 -> 1 2 3 = eと同じ効果。
t {(s { v } -> t { 2 3 1 -> 1 2 3 = eと同じ効果。

これから、群の乗積表を作れば、

	e	s	t
e	e	s	t
s	s	t	e
t	t	e	s

さらに、　s　と t　は互いに逆元である事も判る。
検討しよう。　逆元ti は(1 2 3 -> 3 1 2) の逆元故、
(3 1 2 -> 1 2 3) で、これを（Ｊ言語で）ソートし直せば、
(1 2 3 -> 2 3 1) となり、　これは　元　s である。

○　2)　A4 = { 1, a, b, r, c, d, e, f, s, g, h, t}、
ただし 1 = 上 (1 2 3 4)
　　　　　下 (1 2 3 4)、

r = 上 (1 2 3 4)　 s = 上 (1 2 3 4)　 t = 上 (1 2 3 4)
　 下 (2 1 4 3)　　　下 (3 4 1 2)　　　下 (4 3 2 1)
互換で　(1 2) (3 4) 、　　(1 3) (2 4)、　　(1 4) (2 3)、

a = (1)(2 3 4)、b = (1)(2 4 3)、c = (4)(1 2 3)、d = (3)(1 2 4)、
e = (4)(1 3 2)、f = (2)(1 3 4)、g = (3)(1 4 2)、h = (2)(1 4 3)。

これから群表を作れば、 12 x 12 の大表になる。　一部のみを示す。
1 は単元である。　表の対角線に対して、対称である。

__	1	a	b	r	c	d	e	f	s	g	h	t
1	1											
a			1									
b		1										
r				1								
c								1				
d										1		
e					1							
f											1	
s									1			
g						1						
h								1				
t												1

この表は、群論の教科書や数学事典類で、見る事が出来る。
勿論、Ｊ言語で、 A3 の場合同様に、作成も可能である。

性質：

8） A4 の内、位数　2 の部分群は　3ケ、
{ 1, r }、　{ 1, s }、　{ 1, t } である。

2）A4 の内、位数　3 の部分群は　4ケ、
{ 1, a, b }、　{ 1, c, e }、　{ 1, d, g }、{ 1, e, f }

3）　A4 の内、位数　4 の部分群は　1ケ、
{ 1,　r,　s,　t} ＝　実は、前稿（文献 1）　で述べたが
Klein の4元群と同型である。 今は正規部分群である。
元来、 A4 も　4 次対称群 S4　の 正規部分群である。
ある群 Gが 可換群（アーベル群）であれば、その部分群は
正規部分群であるのだ。

4） ラグランジュの定理によれば、A4 の位数は 4! / 2 = 12　は、
その部分群の位数と倍数・約数の関係にある。
その約数の最高　6 に相当する部分群は、今は無い。

9） V4 の A4　における　指数 [A4 : V4] = 12 / 4 = 3 である。
A4 / V4 の位数は 3 で、それは奇数故、巡回群であるので、
可換群であるので、正規鎖　A4　⊃ V4 ⊃　1　　を持つ。
それ故、　A4 は　可解群である。　（　対称群 S4 も 可解群である。）

○　4）4元数群

実際に演算をトライすれば、$ij(-i)(-j)=ij(ij)=(-k)(-k)=kk = -1$
等々から、最終的に残る元は、1 と　-1　の 2種類のみとなる事が
判る。　即ち、群 Z2　である。

（注意）この群は、ij ≠ ji であるから、可換群では無いが、可解群では
ある。

4.　可解群　に関する　諸定理

10) Burnside の定理：　位数が　p^a・q^b　（p, q は素数）の群は可解群である。

11) Feit-Thomson の定理：位数が奇数である群は可解群である。
この証明は有限群論についての最近（1963）の大成果であって、300ペイジ
にもなる程だと云う（文献３）。

12) 位数 1 ～ 59　までの群は、全て可解群である。　位数 60 の群に、5次交代群
があるが、可解群では無い。　上記 2 定理以外の理由で、可解群になるものの
位数を（因数分解して）示せば、次の通り。

2,　2^2,　2・3,　2^3,　2・5,　2^2・3,　2・7,　2^4,　2・3^2,　2^2・5,
2・11,　2^3・3,　2・13,　2^7・7,　2・3・5,　2^5,　2・17,　2^2・3^2,
2・19,　2^3・5,　2・3・7,　2^2・11,　2・23,　　2^4・3,　2・5^2,
2^2・13,　2・3^3,　2^3・7,　2・29

この内、上記の 3 行目、後ろから　2つ目の　2^4・3 = 48　が問題の
位数である。

（数学的には、答が出て居るのだが、計算的には、解を示すべきなのだろう。

5.　　む　　す　　び

この辺の問題は、18世紀以来、そうそうたる大学者によって研究されて来た
分野である。　　ラグランジュ、アーベル、ガロア、ジョルダン、ケーリー、
クロネッカー、　フロベニウス　等々。　高級な概念の山あり谷あり、流石の
我等のＪ言語といえども、何時でも、快刀乱麻の威力を発揮出来るとは限らぬ。
昨年１月の例会報告、JAPLA 2008/Jan/26 で、私は「５次方程式　Quintic
Equation の 話題　（その1）]（文献 4）　を述べたが、あの時はJ言語の
威力を十分に体感した。　なにしろ、５次方程式の「判別式」まで付録に出来
たのだから！　しかし、「何時もそうだとは限らぬ」が、今回の感想である。
今後さらに、JAPLA 会友諸賢の応援をお願いしたい！

文　　　　献

0) 中野・西川・山下「 群論演習　と　J　(その 0)、 志村論文を応援して」
Proceedings JAPLA 2005

1）中野嘉弘　「 群論演習　と　Ｊ　（ その　１)」
JAPLA 2009/4/25　群表1.txt　　pp.　8

2）http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1326192808

3）横田一郎著「群論入門」p.155、現代数学社、1997.6.20 、pp.212、¥2,600

4)中野嘉弘「 ５次方程式 Quintic Equation の 話題　（その1）］
JAPLA 2008/1/26　Quint.doc　pp.11