

群論入門演習 (4)

J への 応援エッセイ

中野嘉弘 (札幌市、86歳)

FAX 専 011-588-3354, e-mail: yoshihiro@river.ocn.ne.jp

は し が き

JAPLA の会場、即ち鈴木先生(名誉教授)の統数研が立川市に移転されて、皆様張り切って居られるのに、年寄りの泣き言など申して居られるか！
 と思って、ささやかな応援エッセイを送信致します。
 インターネットの Yahoo 知恵袋の語学のカテゴリ(独語)で最近見た掛け声、
 「そら行け！」 Los geht's! で行こう。

0. 年甲斐の弁

私、多忙の為、投稿困難と西川会長に、つい泣き言しましたが、賑やかにしたいので僅かながら弁じます。

最近、旧制高等学校の全国的寮歌祭が、あちこちで盛んです。札幌の北大構内でも、去る9月5～6日に盛会裡に行われました。京都の三高からは93歳がお二人、さらに数歳もの年長者まで来られたのは、驚きであった。

人も歌も、遠方より来たるで、一高の「ああ玉杯」から台北高校の「獅子頭山に雲乱れ」まで！台湾の李登輝総統の出身校(→京大へ)です。

宇宙線や X 線星の研究者で、理研の理事長にも成られた小田稔様は札幌生れ、台北高校から東大へ進学と聞いて居ます。

また、北大の「都ぞ弥生」から韓国の京城帝大予科「高麗野の里よ」まで、懐かしい限りでした。この京城大の出身者で、スイスのセルン CERN で高エネルギー物理の研究をして居た方も居られましたよ。

もちろん、鈴木先生ゆかりの山形高からは、例年ながら多数来られ、中にはドイツ語の准教授で羽織・袴・高足駄の猛者まで来られました。流石に、ドイツリートは正調です。祖父が戦艦「大和」の乗り組みだったとか！そのブログがなんと、小生の分に割り込んで来る凄まじさ。

1. 知恵袋の効用

お馴染みの「Yahoo 知恵袋」中には群論の話題が散見される。今回の作文の為に、眺め直していたら、結構立派な？作文があるではないか！著者はと見れば、驚いたなー、私自身ではないか！忘れっぽくなったのだな！

例1) 2009/4/15 質問

「群にあたるものを選び。* 対称群 S_n ($n=1, 2, 3, 4$)、* 交代群 A_n ($n=3, 4$)、
 クライン Klein の四元群 V_4 ……」

回答 BA(ベストアンサー)は私。 A4判 pp. 4、詳しくは
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1125219831

例2) 2009/3/13 質問

「4次対称群 S_4 と5次対称群 S_5 でのシロー2部分群とシロー3部分群を求めよ。」補足:

http://www.geocities.jp/narunarunarunaru/study/hoslku_20090317.txt

回答 BA(ベストアンサー)は私。 A4判 pp. 1 詳しくは

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1324061183

あとは、他人の回答であるが、群論が話題になる例として示して置く。

例3)「4次の交代群 A_4 には、位数6の部分群が無いことを示せ。」

答 http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1413417744

例4)「5次交代群 A_5 に於て、位数3の部分群と位数4の部分群を全て求めよ。」

答 http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1232491037

例5)「5次交代群 A_5 の類等式を求める巧い方法を問う。」

答 http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1032969390

例6)「 n 次交代群 A_n ($n \geq 3$) の正規部分群 H が3次巡回置換を含めば、 $H = A_n$ ($n \geq 3$) となることを証明せよ。」

答 http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1133012856

2. 入門書の難解例

群論が入門当初から馴染めないのは、置換、転換、互換などの表示の説明は多いけれど、それを実習する時に、どうも、数学的な計算が出来かねるのが、困難の原因と思われる。その対策の例を示して、入門の一つとしたい。

例題として、古い本だが、園正造著(文献1)のp.20から採る。
巨大括弧印刷が出来ないので、判読をお願いしたい。

$$\begin{aligned} & (123456) \\ & = (1256)(34) = (12)(15)(16)(34) \\ & (254361) \end{aligned}$$

解き方は普通は、紙と鉛筆で、試行錯誤の努力をする筈だが、それは避けたい。

準備1)関数 tran : その Script は(文献2)。

例1) (3 4) tran (1 2 3 4 5 6) -> 1 2 4 3 5 6
つまり、3 < - > 4 の交換をする関数である。

例2) (2 0 1) tran (0 1 2) -> 2 1 0
左引き数の最初の2ケ2 < - > 0 のみが有効。

準備2) 関数 simperm : その Script も(文献2)。

例3) (1 2 3 4) simperm (1 4 3 2) -> 2 4
1 と3 は変換されていないから、残る変換は (2 4) のみ。

例4) (0 1 2 3 4) simperm (2 0 1 3 4) -> 0 1 2
3 と4 は変換されていないから、残る変換は (0 1 2) のみ。

本題 (123456) 上下の数列を比較すれば (3 4) は、その組内でのみ変換
(254361) される。残りの (1 2 5 6) は、その組内でのみ変換。

従って、(3 4)(1 2 5 6) となる。さらに後者は互換の積となる。

即ち (1 2 5 6)=(1 2)(1 5)(1 6) であるから、纏めて、題意の通り。

結果は (3 4)(1 2)(1 5)(1 6) 。

3. 関数的処理

上の演算関数として、dwperm(本例の如く、簡単な場合)と
alldwperm (いつでも可能な方法)を作った。その Script は末尾に。
直前の上の数列が、左引数で、下の数列が右の引数としたものが、下式
である。

例1) (1 2 3 4 5 6) allperm (2 5 4 3 6 1)

演算途中の一部を示す。

```
.....  
  
j = 2  
i= 0  
3 2  
1 2 3 4 5 6  
i= 1  
3 5  
1 2 3 4 5 6  
i= 2  
3 4  
1 2 5 6  
i= 3  
  
i= 4  
3 6
```

```

1 2 3 4 5 6
i= 5
3 1
1 2 3 4 5 6
j = 3
.....

```

左引数の(0オリジンで)2番目(j=2)の数は3であり、右引数で(0オリジンで)2番目(i=2)の数は4である。そのペアの(3 4)と、その下の(1 2 5 6)が、求める置換の積を作る。

関数 `dwperm` では、候補の置換数のペアを予め、見当を付けて、演算を迅速化するものである。その場合は、見当を付けた `j=2` の位置の値2を左引数の最後尾に与えて置いて、計算を始める。例えば

(1 2 3 4 5 6 2) `dwperm` (2 5 4 3 6 1) である。

演算結果は、最初から、予想した部分のみが表示される。`allperm` では、予測せずに、先頭から、機械的に全部、探索する。それだけの差異のみである。

4. むすび

群論に於ける、置換、転換、互換、巡回表示などの比較が機械的に可能となった。

(JAPLA の応援の為に、少々、無理をして纏めて見た。未熟は御寛容を！)

文 献

- 1) 園正造:「高等代数学 上巻 (群論)」至文堂、昭和3年十月五日 三版
- 2) 中野嘉弘:「群論演習 と J (その3)」 JAPLA 2009/6/27

Scripts

```

dwperm=: 3 : 0
:
x0=. }:x
j =. {: x
NB. x simperm (jx, j { i. # y) tran y

jx =. j{x0
i=.0

```

```

im=. # y
while. i < im do.
wr 'i= ', ":i
iy=. i { y
if. jx=iy do. goto_1.end.
jxiy=. (jx, iy)
jxiyt=. jxiy tran y
wr ans=. x0 simperm jxiyt
label_1. i=.i+1
end.
' '
)

```

```

alldwperm=: 3 : 0
:
x0=. x
jm =. # x0
j =. 0
NB. x simperm (jx, j { i. # y) tran y
while. j < jm do.
wr ' j = ', ": j
jx =. j{x0
i=.0
im=. # y
while. i < im do.
wr 'i= ', ":i
iy=. i { y
if. jx=iy do. goto_1.end.
wr jxiy=. (jx, iy)
jxiyt=. jxiy tran y
wr ans=. x0 simperm jxiyt
label_1. i=.i+1
end.
j=.j+1
end.
' '
)

```