JAPLA 09/8/5-6 夏ゼミ　　　　　　　　　xtan2.txt

方程式 X･tan X = A の 解

中野 嘉弘 （札幌市、86 歳）

FAX 011-588-3354
e-mail yoshihiro@river.ocn.ne.jp

J 言語の勉強には、難問(?) 処理例が実践向きだと思う。

は し が き

「ニュート法」で解けるかどうか？怪しい難問の解法を話題にする。
最近、Yahoo 知恵袋、「物理学」の質問中の、ひねくれた問題と格闘した。
実は、「シッフの量子力学演習」中の難問であった。

1. 質 問

最近、見掛けた問題に、下記があった。

質問1) 「連立方程式 $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ ･･･(1)
$\xi \cdot \tan \xi = \eta$ ･･･(2)
を解け。 変数は ξ と η です。」（文献 1）

既に、二人の回答者が居て、私は三人目であった。 私は、文字
ξ、η の代わりに、x, y を用いた。

質問2) 「方程式 $\tan x - x =$ 定数 上の解 x を求めたい。
エクセル でグラフ的にやりたいが ･･････。」
これは似ている質問だ。
（これは、本稿では、最近の流行例としての紹介のみ。）

1a. 解 （主値）

与問題は、文字を変更すると、
$x^2 + y^2 = a^2$ ･･･(1)、 $x \cdot \tan x = y$ ･･･(2) で、
(2) から y を (1) に代入すれば、
$f(x) = x^2 + (x \cdot \tan x)^2 = a^2$ ･･･(3)
の解を求める事になる。
$f(x) - a^2 = 0$ の 解は数値解が常識。

$y = x \cdot \tan x$ は、x については偶関数故、放物線的または U 字型図形である。
それと(1)式の円との交点の x、y 座標が解である。
1 組見付かると、± で個数は 4 倍になる。

解は主値とは限らない。 $x = \pi/2$ の倍数が特異点であるからだ。
ニュートン法はそのままでは、使い難い。 質問2) は、その為に出て来たものだ。
ニュートン･ラフソン法を楽に実行出来るように、$\tan x$ のマクローラン展開を

使う。

そこで、$\tan x$ には、使う(x^9 次まで)。

$y = x (x + 1/3\cdot x^3 + 2/15\cdot x^5 + 17/315\cdot x^7 + 62/2835\cdot x^9 + \cdots\cdot)$

質問 1) 式(1) $x^2 + y^2 = a^2$ に代入・整理すると、$f(x) = x^2 + (x\cdot\tan x)^2$
$= x^2 + y^2 = x^2 + x^4 + 2/3\cdot x^6 + 17/45\cdot x^8 + 62/315\cdot x^{10} +$
$254/4725\cdot x^{12} + 68/4725\cdot x^{14} + 289/99225\cdot x^{16}$
$= a^2$ ･･･ (4)

さて、$y = x\cdot\tan x$ または展開式は x について偶関数。 詳しくは、放物線的
または U 字型図形である。 それと(1)式の円との交点の x、y 座標が解である。
それらは、1 組見付かると、± で個数は 4 倍になる。

その計算の代表例を示す。y は展開式、f(x)の【検算】は tan 関数で行った。

● $a = 1$ の時の解。
$x = 0.739494$、 それから (2)を用い、
$y = 0.67538$。
【検算】$f(x) = 1.00185 \fallingdotseq 1^2$。

◎ $a = 2$ の時の解。
$x = 1.03362$,
$y = 1.73543$。
【検算】$f(x) = 4.0801 \fallingdotseq 2^2$。

▲ $a = 3$ の時の解。
$x = 1.17012$,
$y = 2.76235$。
【検算】$f(x) = 8.99995 \fallingdotseq 3^2$。

■ $a = 4$ の時の解。
$x = 1.2523528$,
$y = 3.79889$。
【検算】$f(x) = 15.9999 \fallingdotseq 4^2$。

● $\pi/2 = 1.570796327\cdots$ であるから、此処までの解は主値である。

解(交点)が主値外に出るのは、$a = 12$ 以上らしい。

2. 主値外 の 解

Yahoo 知恵袋への私の回答の[補足編集 7.21] を再録する。
･････････････････

ご質問の原点であり、別な回答者 coffee さまの量子論云々の原典、井上健監修
「量子力学演習・シッフの問題」(文献 2)に気付いた。

$a^2= 12$、主値内と主値外の 2 例、計 3 例について、もっと、計算精度を上げて見た。

1) 主値内 0 < X < PI/2:
x1 = 1.213031, y1 = 3.24467,
検算: f(x)= 11.9993 = 12。

2) 主値外 PI/2 < X < PI:
x2 = 2.2949, y2 = _ 2.595,
検算:f(x)= 12.0006 = 12。

3) 主値外 PI < X < (3/2)PI:
x3 = 3.372319 , y3 = 0.79219,
検算: f(x)= 12.0001 = 12。

（取り敢えず、声を挙げておきます。）
回答日時:2009/7/18 13:03:03
編集日時:2009/7/21 10:22:02

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

【参考】別な回答者 coffee_quantum さん のコメント:（私へではありません！が）

（原質問は）シュレーディンガー方程式を解いて、有限の深さの井戸型ポテンシャル
中の粒子のエネルギー準位でも求めてるんですか？

その方程式は解けませんよ。

解きたければ、a を決めて数値的（2分法などで）に解くしかないでしょう。

シュレーディンガー方程式を解いているのなら、波動関数のおおよその形と、井戸の
深さに対してエネルギー準位の数、ぐらいしか求まらないんじゃないですか。

ところで、

> 肝心なことを忘れていました。
> 変数は ξ（グザイ）と η（イータ）です。
って、何が肝心なんだかって感じです。

なお、別な回答者 jesuis さんのは答えになってるのかね？
θ が与えられてなければ、意味ないと思うけどね。

回答日時:2009/7/18 11:12:44
編集日時:2009/7/18 15:34:39

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

（中々、手厳しいですね。）

3. む す び

中野を含め、皆様の回答は、本質的に「二分法」近似である。 J 言語は、
そこでも使い易い長所を持つ。 しかし、tan 関数等々で、主値外を含めた
ニュートン・ラフソン法の例解が示されれば、有効であろう。

期待します。

文　　献

1) Yahoo! Japan 知恵袋 「物理学」2009/7/17 23:20:43 mjfnq242さん
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1428401929

2) 井上 健 監修・三枝寿勝・瀬藤憲昭著「量子力学演習−−シッフの問題解説」
吉岡書店、1971 第1刷、1989 第15刷、pp.380 の内、pp.20-22。