群論演習と J (その 1)
Yahoo 知恵袋の問答から

中野嘉弘
（86 歳、札幌市南区）

2009 年 4 月 23 日

目次

[*1]

概要

J 言語で群論の計算を楽しむ例をしめそう。

1 はしがき

行列・配列処理に最適な J 言語を、群論 Group Theory に、適用しない手は無かろう。
JAPLA の会友から、既に、数編の報告が為されている。 例えば

- 西川利男：｢組合わせ数学 Combinatorics への J のツール ― 並べ替え （順列、置換）の関数 A.

[*1] FAX 011-588-3354 E- mail yoshihiroriver.ocn.ne.jp

と　C.」（文献１）

- 志村正人：「Code 変換　J and Group (その 0)」
- 　同「Code 変換　J and Group (その 1)」（文献 ２)
- 中野・西川・山下「群論演習　と　J (その 0)、　志村論文を　応援して」（文献３）。

いずれも、8 ～ 4 年も昔の事である。その後、中野は「数独」の問題作成法の一案として、取り上げた記憶がある。

最近、中野は Yahoo 知恵袋の問答の中で、「シロー Sylow 群] の問題で、手こずって悔しい思いをしたので、久し振りに、再トライして見た。　若干、楽しめたので、会友の皆様を誘い入れたい。

例題を紹介すれば、

問題 「位数 175 の群はアーベル群である」(2009/3/18) 残念！
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1024201520

問題 「4 次対称群 S_4 と 5 次対称群 S_5 でのシロー 2 部分群とシロー 3 部分群を求めよ」(2009/3/12) 中野 Best Answer
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1324061183

問題 「群にあたるものを選べ。
1. 対称群 Sn（ｎ＝１、 ２，３，４）
2. 交代群Ａｎ（ｎ＝３，４）
3. クラインの四元群Ｖ４」('09/4/16) 中野 Best

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1125219831

2　1 次、2 次対称群 S1, S2

2 次置換群から始めよう。

数の集合を n2 =. 0 1 としよう。　記号 =. は代入の意味。

数は (1 と 2) でも良いが、成る可く簡単にと、上の如くした。

これを置換すれば $p1$ = .1 0 がえられる。　何もせぬのも置換の一つとすれば $p0$ = .0 1 である。これら 2 つの操作の集合を $S2$ と名付ける。 これが群の条件を充たす事を示そう。

置換の操作は、指定順序での抽出と考えても同じ事である。説明には、配列・行列の処理を得意とする J 言語 を適宜用いると便利である。[*2]　下の記号 { は Find 、発見抽出の意味。

`p1 { n2` から１ 0 が得られるので、`p1 = p1 { n2` となる。

記号 = は等号である。逆に、`p1 (p1 { n2)` から　0 1 が得られるので、今度は `p1^2 =p0` となる。

$p0$ は不動の置換（何もせぬ）なので、数学の掛け算の１相当と見て、単元、単位操作と考え、記号 I，i，E，e 等で示される事が多い (E, e はドイツ語の Einheit)。 単元と呼ばれる。

そこで、$p0 = I$、$p = p1$ と書き直すと、内容的に $S2 = (I, p)$ である。$S2$ は、群の条件を充たしている。0 元（要素）の結合の操作が定義されている（置換、抽出)。

結合したものが、同じ集合内に含まれる。

[*2] J 言語はカナダ国原産、無料で DL 可能。

1. 単元　I がある。
2. 各元に、その逆元がある。（今は p 自身が p　の逆元、I は I 自身の逆元。）

かくて、集合 S2 は 2 次の（置換）群である。

$I = (0\ 1)$, $p = (1\ 0)$ は互換でもあり、しかも、それぞれ奇数ケである。もしも、偶数ケの互換の積であれば、交代群と呼ばれるものだが、今はそうでは無い。　（強いて探せば、単元 I では奇数ケの積でも、偶数ケの積でも同じであるから、２次交代群は単元のみから成る。）　これは、２次対称群 S2 と呼ばれる。

3　3 次交代群　A3

先ずは 3 次交代群の例で、群表を作って見よう。

`n =. 1, 2, 3` とします。 `=.` は代入の記号の意味。

3 次の順列 (permutation) の 3! 即ち 6 ケのリストの中､自明な単元 `i =. 1 2 3` の他, `s =.2 3 1, t =. 3 1 2` が、互換の積にならぬので、偶置換であり、交代群の元になれる。

群操作の意味は、置換以外にも別解釈、例えば、演算 s n で、数の集合 n から元素を抽出する事だとも可能である。すると、s n の結果は 2 3 1 です。　どちらでも同じ事ですね。

群である事を示す為、群表を作ろう。

群表の行列 `mist =. 3 3 $` (i,s,t から成る 3 行 3 列）である。元 i と i, s, t の演算の組合わせ (i i),(i s),(i t) は実は単一演算 i, s, t を作用させたもの (i, s, t) の組と同じです。数集合 n に作用させると、結果は、それぞれ (1 2 3), (2 3 1),(3 1 2) ですから、

次に、元 s と i, s, t の演算の組合わせを考える。

(s i) は s と同じ。(s s) は　[2 3 1][2 3 1] 故 [3 1 2] 即ち t と同じ。　(s t) は　[2 3 1][3 1 2] 故 [1 2 3]、即ち i　と同じです。　結局　(s, t, i) となる。

元素 t の場合も同様にして、全体では行列

`mist =. 3 3 $ (i, s, t), (s, t, i), (t, i, s)` が得られる。

これが、3 次交代群の群表

```
i, s, t
s, t, i
t, i, s
```

です。

或いは、リストの数字を用いて群表行列は

```
[1 2 3][2 3 1][3 1 2]
[2 3 1][3 1 2][1 2 3]
[3 1 2][1 2 3][2 3 1]
```

でも良い。

（数集合 n の中に 0 を含めて、順位の先頭を 1 で無くて 0 から勘定することにしても、実は同じ事です。）

これら群表から、群の定義を充たしていることは容易に判ります。これら群表を簡単に作る為の最適の言語もあります。カナダ国原産の「行列処理用 J 言語」です。 簡単に DL して学習出来ます。

次は、サイズの大きくなる順番に、クラインの四元群、そして３次対称群、さらに４次対称群 等々で例示すれば良いのでしょうか？

4　Klein の四元群　 V4

Klein の四元群　 V4 :

J 言語　と　０オリジンを使う。

単元 i =. 0 1 2 3 、他の元は a =. 1 0 3 2、

　b =. 2 3 0 1、 c =. 3 2 1 0 が既に有名である。

群表を作る。J 言語の演算をするが、余り気にしないで！単元 i との組み合わせは、先ず

　A =. i ; (a { n), (b { n),(c { n) と置いて

```
 i { A  から | 0 1 2 3| 1 0 3 2| 2 3 0 1| 3 2 1 0|
 a { A  から | 1 0 3 2| 0 1 2 3| 3 2 1 0| 2 3 0 1|
 b { A  から | 2 3 0 1| 3 2 1 0| 0 1 2 3| 1 0 3 2|
 c { A  から | 3 2 1 0| 2 3 0 1| 1 0 3 2| 0 1 2 3|
```

群表 M44 =. 4 4 $ (i{A), (a{A), (b{A), (c{A) は

```
| 0 1 2 3| 1 0 3 2| 2 3 0 1| 3 2 1 0|
| 1 0 3 2| 0 1 2 3| 3 2 1 0| 2 3 0 1|
| 2 3 0 1| 3 2 1 0| 0 1 2 3| 1 0 3 2|
| 3 2 1 0| 2 3 0 1| 1 0 3 2| 0 1 2 3|
```

```
M44i =. M44 = <i  から
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1

M44a =. M44 = <a
M44b =. M44 = <b
M44c =. M44 = <c

0 0 0 1
0 0 1 0
0 1 0 0
1 0 0 0


] M44m =. (M44i) + (2* M44a) + (3* M44b) + (4* M44c)
```

```
  1 2 3 4
  2 1 4 3
  3 4 1 2
  4 3 2 1

 ] M44m1 =. M44m  - 1
  0 1 2 3
  1 0 3 2
  2 3 0 1
  3 2 1 0

  M44m1  { 'iabc'
```
から
```
 iabc
 aicb
 bcia
 cbai
```

かくて　Klein 四元群　V4 の群表が得られたので、群を為す。

5　Klein の四元群　V4　　続き

Klein の　Vier Gruppe (2)：

4 つの 2 次行列 E = [[1 0][0 1]], A = [[1 0][0 -1]],
B = [[-1 0][0 1]], C = [[-1 0][0 -1]] は 4 元群を為す事を示せ。
横井英夫・はだ野敏博「代数学演習 [新訂版]」2003.6 (文献 8)

```
   NB. 2009. 4.19. pm.11:00
  E=. 2 2 $ 1 0 0 1
  B=. 2 2 $ _1 0 0 1
  C=. 2 2 $ _1 0 0 _1
  A=. 2 2 $ 1 0 0 _1

  E
1 0
0 1

  EABC=. E, A, B, C
   ]BT=. E;A;B;C

| 1 0 | 1  0 |_1 0 |_1  0 |
| 0 1 | 0 _1 |  0 1 |  0 _1 |
```

```
  (<E) +/ . * each BT

| 1 0 | 1  0 |_1 0 |_1  0 |
| 0 1 | 0 _1 |  0 1 |  0 _1 |

 ]ET=. (<E) +/ . * each BT

| 1 0 | 1  0 |_1 0 |_1  0 |
| 0 1 | 0 _1 |  0 1 |  0 _1 |


 ET e. E
0

 ET i. E
4 4
4 4

 ET e. <E
1 0 0 0

 ET i. <E
0

 ET = <E
1 0 0 0


  ]AT=. (<A) +/ . * each BT

| 1  0 | 1 0 |_1  0 |_1 0 |
| 0 _1 | 0 1 |  0 _1 |  0 1 |

  ]BT=. (<B) +/ . * each BXT=. BT

|_1 0 |_1  0 | 1 0 | 1  0 |
|  0 1 |  0 _1 | 0 1 | 0 _1 |

   BXT = <B
0 0 1 0
```

```
   ]CT=. (<C)+/ . * each BXT

|_1  0|_1 0| 1  0| 1 0|
| 0 _1| 0 1| 0 _1| 0 1|

   BXT = <C
0 0 0 1
   BXT

| 1 0| 1  0|_1 0|_1  0|
| 0 1| 0 _1| 0 1| 0 _1|

   CT

|_1  0|_1 0| 1  0| 1 0|
| 0 _1| 0 1| 0 _1| 0 1|

   BXT = CT
0 0 0 0

   BXT e. CT
1 1 1 1

   BXT
| 1 0| 1  0|_1 0|_1  0|
| 0 1| 0 _1| 0 1| 0 _1|

   CT
|_1  0|_1 0| 1  0| 1 0|
| 0 _1| 0 1| 0 _1| 0 1|

   BXT i. CT
3 2 1 0

   BXT i. BT
2 3 0 1

   BXT i. AT
1 0 3 2
```

```
   BXT i. ET
0 1 2 3

   ]TB4 =. 4 4 $ 0 1 2 3 1 0 3 2 2 3 0 1 3 2 1 0
0 1 2 3
1 0 3 2
2 3 0 1
3 2 1 0

   TB4 { 'EABC'
EABC
AECB
BCEA
CBAE
```

6　３次対称群　Ｓ３

次は３次対称群　Ｓ３，　４次対称群　Ｓ４　に進む。
計算は同好だが、少々、長くなりますね。
群表は、S3 で 6x6 行列、 S4 で 24x24 行列か！？
３次対称群　Ｓ３:
]plst3=. plist 3　から群の元は以下の６ケである。

```
0 1 2
0 2 1
1 0 2
1 2 0
2 0 1
2 1 0
```

単元Ｉ =. 0 1 2 とし、他の元、 a,b,c,d,e は上表から順次に採る。群表作成の準備として、前例同様に

```
B =. │0 1 2│0 2 1│1 0 2│1 2 0│2 0 1│2 1 0│
```

として、

```
  M66 =.

│0 1 2│0 2 1│1 0 2│1 2 0│2 0 1│2 1 0│
│0 2 1│0 1 2│1 2 0│1 0 2│2 1 0│2 0 1│
│1 0 2│2 0 1│0 1 2│2 1 0│0 2 1│1 2 0│
```

```
| 1 2 0 | 2 1 0 | 0 2 1 | 2 0 1 | 0 1 2 | 1 0 2 |
| 2 0 1 | 1 0 2 | 2 1 0 | 0 1 2 | 1 2 0 | 0 2 1 |
| 2 1 0 | 1 2 0 | 2 0 1 | 0 2 1 | 1 0 2 | 0 1 2 |
```

結局、

```
   ]M66m1 =. M66m - 1
0 1 2 3 4 5
1 0 3 2 5 4
2 4 0 5 1 3
3 5 1 4 0 2
4 2 5 0 3 1
5 3 4 1 2 0
```

　そして

```
   M66m1 { 'Iabcde'
Iabcde
aIcbed
bdIeac
ceadIb
dbeIca
ecdabI
```

この最後が、求める　S3 の群表である。元数は 6 。　それが合理的に得られたから群を為すと云える。
　次の S4 では元数が 24 であるから、さらに手間が掛かろうね。　おまかせしたい。

S3 の別件：

S3 =. {e, (1 2), (2 3), (3 1), (1 2 3), (1 3 2)}

```
   ]plst3=. plist 3
0 1 2
0 2 1
1 0 2
1 2 0
2 0 1
2 1 0


   ]plst31=. plst3 + 1
1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
```

```
3 2 1

   C. 0{plst31
│0│1│2│3│

   C. 1{plst31
│0│1│3 2│

  u <;. 1 (plst31)
│1 2 3│1 3 2│2 1 3│2 3 1│3 1 2│3 2 1│

    (}. & C.) each u <;. 2 (plst31)

││1│2│3│││1│3 2│││2 1│3│││3 1 2│││3 2 1│││2│3 1││

   > each (}. & C.) each u <;. 2 (plst31)
│1│1 0│2 1│3 1 2│3 2 1│2 0│
│2│3 2│3 0│      │      │3 1│
│3│   │   │      │      │   │
```

共役類

```
    {(1 2 3),(1 3 2)} or {(2 3 1),(2 1 3)} or (1 2 0),(2 0 1)}
   p30 =. (3 { plst3)
   p40 =. (4 { plst3)

    p30
  1 2 0

   p40
  2 0 1

          p40 { p30 { n0
  0 1 2

   p30 { p40 { n0
  0 1 2

p40{ p30 = p30 { p40  or  p30 = p40 { p30 {  (p40)^-1
```

即ち共役類。

4 次交代群

```
  plst4=. plist 4

   $ plst4
24 4

   6 {. plst4
0 1 2 3

・・・・
0 3 2 1

   plst41=. plst4 + 1
   6 {. plst41
1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2

   ]u=. 24 # 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

   up41 =. u <;. 1 (plst41)

   $ up41
24

   6 {. up41

│ 1 2 3 4 │ 1 2 4 3 │ 1 3 2 4 │ 1 3 4 2 │ 1 4 2 3 │ 1 4 3 2 │

   cup61=. (}. & C.) each up41
   $ cup61
24

   6 {. cup61
```

| | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 1 | 2 | 4 3 | | | 1 | 3 2 | 4 | | | 1 | 4 2 3 | | | 1 | 4 3 2 | | | 1 | 3 | 4 2 | |

4 6 $ cup61

| | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 1 | 2 | 4 3 | | | 1 | 3 2 | 4 | | | 1 | 4 2 3 | | | 1 | 4 3 2 | | | 1 | 3 | 4 2 | |

| | 2 1 | 3 | 4 | | | 2 1 | 4 3 | | | 3 1 2 | 4 | | | 4 1 2 3 | | | 4 3 1 2 | | | 3 | 4 1 2 | |

| | 3 2 1 | 4 | | | 4 2 1 3 | | | 2 | 3 1 | 4 | | | 2 | 4 1 3 | | | 3 1 | 4 2 | | | 4 1 3 2 | |

| | 4 3 2 1 | | | 3 | 4 2 1 | | | 2 | 4 3 1 | | | 2 | 3 | 4 1 | | | 4 2 3 1 | | | 3 2 | 4 1 | |

]i=. > 0 {cup61

| 1 | 2 | 3 | 4 |

]a1=. > 3 {cup61

| 1 | 4 2 3 |

]a2=. > 4 {cup61

| 1 | 4 3 2 |

]a3=. > 8 {cup61

| 3 1 2 | 4 |

]a4=. > 11 {cup61

| 3 | 4 1 2 |

]a5=. > 12 {cup61

```
| 3 2 1 | 4 |

   ]a6=. > 15 {cup61

| 2 | 4 1 3 |

   ]a7=. > 19 {cup61

| 3 | 4 2 1 |

   ]a8=. > 20 {cup61

| 2 | 4 3 1 |

   ]a9=. > 7 {cup61

| 2 1 | 4 3 |

   ]a10=. > 16 {cup61

| 3 1 | 4 2 |

   ]a11=. > 23 {cup61

| 3 2 | 4 1 |

    (0{plst41)
1 2 3 4
   N61=.(0{plst41),(3 {plst41),(4 {plst41),(8{plst41),(11 {plst41),(12 {plst41)
   N61=.N61,(15{plst41),(19 {plst41),(20 {plst41),(7{plst41),(16 {plst41),(23 {plst41)
   $ N61
48
   q:48
2 2 2 2 3

 ]A4 =.  12 4 $ N61
1 2 3 4
1 3 4 2
1 4 2 3
```

```
2 3 1 4
2 4 3 1
3 1 2 4
3 2 4 1
4 1 3 2
4 2 1 3
2 1 4 3
3 4 1 2
4 3 2 1
```

7　正規部分群（不変部分群）

岩波講座　応用数学 11　 [基礎 8] 群と表現：江沢　洋・島　和久　 p.14 (文献 7) に 面白い記述がある。
Normal Sub-Group, 正規部分群、不変部分群、Invariant Sub-Group

```
N =  i,  a9, a10, a11
  =  |1|2|3|4| ,  |2 1|4 3|,  |3 1| 4 2|,  |3 2| 4 1|
```

4 次の場合に限り、交代群（対称群）は正規部分群を持つと云われているが、その例である。
本によっては、一般的に次のようにも書く。**N=I ,** (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)
単群
正規部分群を持たない群を単純 (Simple) と云う。
交換子群与群 G から正規部分群を作る方法に交換子 (commutator) 法がある。　かくして出来る群を交換子群と云う。　　段々、尤もらしくなってきた。　次回にゆっくりやろう。

8　むすび

配列処理の J 言語 を、その特徴を活かして使う例題に巡り会った気分である。
少々難物だが、皆様のお知恵を拝借しながら、折角、楽しむことにしよう。

9　文献

- 西川利男 「組合わせ数学 Combinatorics への J のツールー並べ替え（順列、置換）の関数 A. と C.」 JAPLA 2001/6/23 pp.7
- 志村正人 「Code 変換　 J and Group (その 0)」 JAPLA 2005/9/21 pp.5
- -a) 々 「Code 変換　 J and Group (その 1)」 JAPLA 2005/10/26 pp.3
- 中野・西川・山下「群論演習と J (その 0)、志村論文を応援して」 Proceedings JAPLA 2005

- http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1024201520
- http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1324061183
- http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1125219831
- 江沢　洋・島　和久:「　応用数学 11　 [基礎 8] 群と表現」　岩波講座
- 横井英夫・はだ野敏博「代数学演習 [新訂版]」サイエンス社、2003.6 p.32