マトリクス計算拾遺

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2009 年 3 月 27 日

目次

概要

マトリクスの計算の覚え書き

1 ケーリー · ハミルトン

マトリクスの特性方程式 $\phi(\lambda)$ のλに　A を代入すると $\phi(A) = 0_n$ となる。
（ケーリー · ハミルトンの定理）
$I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \lambda_3 A^3 = 0_3$

```
   C3
 2 _1 1
_1  2 1
 1 _1 2


   ch1 C3
      I       A           A^2         A^3
```

```
+--------+---------+----------+--------+
|1 0 0   | 2 _1 1  | 6 _5 3   |20 _19 7|
|0 1 0   |_1  2 1  |_3  4 3   |_7   8 7| NB. A^n
|0 0 1   | 1 _1 2  | 5 _5 4   |19 _19 8|
+--------+---------+----------+--------+
|_6      |11       |_6        |1       | NB. Lamda
+--------+---------+----------+--------+
|_6  0  0| 22 _11 11|_36  30 _18|20 _19 7|
| 0 _6  0|_11  22 11| 18 _24 _18|_7   8 7| NB. A^n * Lamda
| 0  0 _6| 11 _11 22|_30  30 _24|19 _19 8|
+--------+---------+----------+--------+
```

```
   cayley_hamilton C3
+--------+---------+----------+--------+-+-----+
|_6  0  0| 22 _11 11|_36  30 _18|20 _19 7|=|0 0 0|
| 0 _6  0|_11  22 11| 18 _24 _18|_7   8 7| |0 0 0|
| 0  0 _6| 11 _11 22|_30  30 _24|19 _19 8| |0 0 0|
+--------+---------+----------+--------+-+-----+
```

$$I \qquad +\lambda_1 A \qquad +\lambda_2 A^2 \qquad +\lambda_3 A^3 \qquad = 0_3$$

ここで box の間に内積演算 (+/ . *) を挿入するには一度ボックスを開いて原型に戻した方が計算しやすい

特性方程式は次のようにも表すことができる。この表現はルベリエ・ファディーエフ法で用いられている。

$detA - (traceA)t + t^2 = 0$

成分では

$(ad - bc) - (a + d)t + t^2 = 0$

ケーリー・ハミルトンの等式では

$(ad - bc)I - (a + d)A + A^2 = det(A)I - trace(A)A + A^2 = 0$

1.1 Script

```
power_matrix=: 4 : 'x&mp y' NB. A^n
NB. Usage: A power_matrix ^:(i.3) A
```

```
NB. -Cayley_Hamilton Inverse Matrix-----------------------
ch_sub0=: 3 : ';{:char_lf y ' NB. find lamda
NB. mk A^n
ch_sub1=: 3 : 0
TMP0=.(<=/~i.# y), <"2 y power_matrix ^:(i. # y) y
TMP0,TMP1,: TMP0 * L:0 TMP1=. {@> ch_sub0 y
)
cayley_hamilton=:3 : 0
TMP=. ch_sub1 y
({: TMP),(<'='),< +/ > {: TMP
)
```

2 フィボナッチ数

$$F_n = \begin{cases} 0 & if\ n = 0 \\ 1 & if\ n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & if\ n > 1 \end{cases}$$

Matrix form:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$$

```
   a=. (0 1,.1 1)&(+/ . *) ^:(i.16) 1 1
   a,. %/"1 a
  1   1        1
  1   2      0.5
  2   3 0.666667
  3   5      0.6
  5   8    0.625
  8  13 0.615385
 13  21 0.619048
 21  34 0.617647
 34  55 0.618182
 55  89 0.617978
 89 144 0.618056
```

```
144  233 0.618026
233  377 0.618037
377  610 0.618033
610  987 0.618034
987 1597 0.618034
```

固有値に黄金比が出る。そして $k \to \infty$，のとき $\dfrac{f_{k+1}}{f_k}$ は黄金比に近づく。

黄金比はオームの法則のオームが 1835 年に唱えたもので、古代ギリシャやローマでは用いられていない。バイオリニストのクライスラーは自作の小品を一昔前の架空の作曲家の曲としていた。

```
   char_lf 0 1,: 1 1
+-+----------------+-------+
|1|1.61803 _0.618034|_1 _1 1|
+-+----------------+-------+
```

3　シュメール人の $\sqrt{2}$

以下はシャトランによる。紀元前 2000 − 3000 年にシュメール人が用いていた。スミルナの *Théon* が 2 世紀に再発見したという。

$$\begin{cases} x & \leftarrow & x+2y \\ y & \leftarrow & x+y \end{cases}$$

反復により $\dfrac{x^2}{y^2}$ が 2 に近づく

$$\begin{cases} u_0 & & = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ u_1 & = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_{k-1}, & k \geq 1, \quad っこで \quad u_k = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} \end{cases}$$

```
(%/"1 a) ,.~ a=.  (1 2 ,:1 1)&(+/ . *) ^:(i.10) 1 1
      1       1       1
      3       2     1.5
      7       5     1.4
     17      12 1.41667
     41      29 1.41379
     99      70 1.41429
    239     169  1.4142
```

```
  577    408 1.41422
 1393    985 1.41421
 3363   2378 1.41421
```

マトリクスの 2 を他の数を変更すれば他の平方根を求められる

```
   (%/"1 a) ,.~ a=.  (1 3 ,:1 1)&(+/ . *) ^:(i.10) 1 1
    1    1       1
    4    2       2
   10    6 1.66667
   28   16    1.75
   76   44 1.72727
  208  120 1.73333
  568  328 1.73171
 1552  896 1.73214
 4240 2448 1.73203
11584 6688 1.73206
```

4 References

F. シャトラン/伊理正夫、由美訳「行列の固有値」 Springer/Tokyo 1993/2003

Download

J Language http://www.jsoftware.com

Script http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue/

APL&J APLAssociation Workshop