

マトリクス計算拾遺

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2009年3月27日

目次

1	ケーリー・ハミルトン	1
2	フィボナッチ数	3
3	シュメール人の $\sqrt{2}$	4
4	References	5

概要

マトリクスの計算の覚え書き

1 ケーリー・ハミルトン

マトリクスの特性方程式 $\phi(\lambda)$ の λ に A を代入すると $\phi(A) = 0_n$ となる。
(ケーリー・ハミルトンの定理)

$$I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \lambda_3 A^3 = 0_3$$

C3

2 _1 1

_1 2 1

1 _1 2

ch1 C3

I A A^2 A^3

```

+-----+-----+-----+-----+
| 1 0 0 | 2 _1 1 | 6 _5 3 | 20 _19 7|
| 0 1 0 | _1 2 1 | _3 4 3 | _7 8 7| NB. A^n
| 0 0 1 | 1 _1 2 | 5 _5 4 | 19 _19 8|
+-----+-----+-----+-----+
|_6      |11      |_6      |1      | NB. Lamda
+-----+-----+-----+-----+
|_6 0 0| 22 _11 11|_36 30 _18|20 _19 7|
| 0 _6 0|_11 22 11| 18 _24 _18|_7 8 7| NB. A^n * Lamda
| 0 0 _6| 11 _11 22|_30 30 _24|19 _19 8|
+-----+-----+-----+-----+

```

cayley_hamilton C3

```

+-----+-----+-----+-----+-----+
|_6 0 0| 22 _11 11|_36 30 _18|20 _19 7|=|0 0 0|
| 0 _6 0|_11 22 11| 18 _24 _18|_7 8 7| |0 0 0|
| 0 0 _6| 11 _11 22|_30 30 _24|19 _19 8| |0 0 0|
+-----+-----+-----+-----+-----+

```

$$I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \lambda_3 A^3 = 0_3$$

ここで box の間に内積演算 (+/ . *) を挿入するには一度ボックスを開いて原型に戻した方が計算しやすい

特性方程式は次のようにも表すことができる。この表現はルペリエ・ファディーエフ法で用いられている。

$$\det A - (\text{trace} A)t + t^2 = 0$$

成分では

$$(ad - bc) - (a + d)t + t^2 = 0$$

ケーリー・ハミルトンの等式では

$$(ad - bc)I - (a + d)A + A^2 = \det(A)I - \text{trace}(A)A + A^2 = 0$$

1.1 Script

```

power_matrix=: 4 : 'x&mp y' NB. A^n
NB. Usage: A power_matrix ^:(i.3) A

```

```

NB. -Cayley_Hamilton Inverse Matrix-----
ch_sub0=: 3 : ' ;{:char_lf y ' NB. find lamda
NB. mk A^n
ch_sub1=: 3 : 0
TMP0=.(<=/'i.# y), <"2 y power_matrix ^:(i. # y) y
TMP0,TMP1,: TMP0 * L:0 TMP1=. {> ch_sub0 y
)
cayley_hamilton=:3 : 0
TMP=. ch_sub1 y
({: TMP),(<'='),< +/ > {: TMP
)

```

2 フィボナッチ数

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Matrix form:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$$

```

a=. (0 1,.1 1)&(+/ . *) ^:(i.16) 1 1
a,. %/"1 a
1 1 1
1 2 0.5
2 3 0.666667
3 5 0.6
5 8 0.625
8 13 0.615385
13 21 0.619048
21 34 0.617647
34 55 0.618182
55 89 0.617978
89 144 0.618056

```

144 233 0.618026
 233 377 0.618037
 377 610 0.618033
 610 987 0.618034
 987 1597 0.618034

固有値に黄金比が出る。そして $k \rightarrow \infty$, のとき $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ は黄金比に近づく。

黄金比はオームの法則のオームが 1835 年に唱えたもので、古代ギリシャやローマでは用いられていない。バイオリニストのクライスラーは自作の小品を一昔前の架空の作曲家の曲としていた。

```
char_lf 0 1, : 1 1
+-----+
|1|1.61803 _0.618034|_1 _1 1|
+-----+
```

3 シュメール人の $\sqrt{2}$

以下はシャトランによる。紀元前 2000 - 3000 年にシュメール人が用いていた。スミルナの *Théon* が 2 世紀に再発見したという。

$$\begin{cases} x \leftarrow x + 2y \\ y \leftarrow x + y \end{cases}$$

反復により $\frac{x^2}{y^2}$ が 2 に近づく

$$\begin{cases} u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_{k-1}, \quad k \geq 1, \quad \text{ここで } u_k = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} \end{cases}$$

```
(%/"1 a) ,.~ a=. (1 2 ,:1 1)&(+/ . *) ^:(i.10) 1 1
1      1      1
3      2      1.5
7      5      1.4
17     12     1.41667
41     29     1.41379
99     70     1.41429
239    169    1.4142
```

```

577    408 1.41422
1393   985 1.41421
3363  2378 1.41421

```

マトリクスの2を他の数を変更すれば他の平方根を求められる

```

(%/"1 a) ,.~ a=. (1 3 ,:1 1)&(+/ . *) ^:(i.10) 1 1
  1    1    1
  4    2    2
 10    6 1.66667
 28   16   1.75
 76   44 1.72727
208  120 1.73333
568  328 1.73171
1552 896 1.73214
4240 2448 1.73203
11584 6688 1.73206

```

4 References

F. シャトラン/伊理正夫、由美訳「行列の固有値」 Springer/Tokyo 1993/2003

Download

J Language <http://www.jsoftware.com>

Script http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue/

APL&J APLAssociation Workshop