エクゾチックオプション価格のシミュレーション　その9 −バリアーオプションの価格式 (4) −

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models − 9 − The Barrier Option Pricing Model(4)

(株) 竹内ハガネ商行
竹内寿一郎

7．Down and Out Call (B $\geq$ K) の場合の評価式

このケースは以前バリアーオプションを分類したときの No.10 に相当し [3]、バリアー価格 (B) がスポット価格より小さい (これを Down という) とき、ノックアウト (バリアーに到達したら無効になる) で、コールオプション (買う権利)、行使価格 (K) がバリアー価格 (B) より小さい場合である。たとえば、ここ 7 節では次のような取引である。

原資産	ドル円為替レート
満期	6ヶ月後
スポット価格	120 円
バリアー価格	100 円
行使価格	90 円
オプション	ノックアウトコールオプション

現在の円の対ドル為替レートが 120 円のときの、行使価格 90 円のコールオプションではあるが、オプション期間の 6ヶ月以内に為替レートが、1 度でも 100 円以下の価格をつけたときこのオプションは消滅してしまう、ということである。そういうときの評価式を求めることになる。

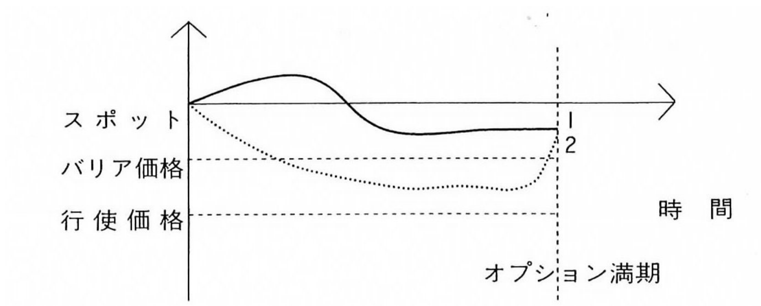

図 1．Down のとき、満期に価格が行使価格以上になる 2 つの経路
(行使価格 90 円、バリアー価格 100 円、スポット価格 120 円)

バリアー価格を 100 円として、次の 2 つの経路を考える

[1] 満期 T に価格がバリアー価格 100 円以上 (当然行使価格 90 円以上) になる場合 (ここでは過去の経路は一切問わない)、

[2] オプション期間中に一度はバリアー価格 100 円以下となり (ノアウトック)、その後満期 T では価格が 100 円以上となる。

オプション期間中に一度もバリアー価格以下にならず、オプション満期 T に価格 $S(T)$ が、バリアー価格 B より大きくなっているとき、キャッシュフロー $S(T)-K$ が得られる ($S(T)$ が K という価格で買えるから) 評価額を C(これが求める評価額) とし、一方経路 [1] での価格を C_I、経路 [2] での価格を C_{II} で表すとすると、

$$C = C_I - C_{II}$$

と書くことができる。

経路 [2] は、経路 [1] が過去の経路は一切問わないので [1] の部分であり、バリアーに到達すること無く価格 $S(T)$ がバリアー価格 B 以上になる確率は、[1] の確率から [2] の確率を引けばよい。すなわち、このときの評価額は [1] のときの評価額 C_I から [2] のときの評価額 C_{II} を引けば良いことになる。

そこでまず、満期に価格がバリアー価格以上になるとき、キャッシュフロー $S(T)-K$ を得るオプションの評価額 C_I を計算してみよう。

C_2：満期 T で価格がバリアー価格 B 以上のときの価格 (資産は行使価格で買える)

とすると C_I は

$$C_I = C_2$$

で表される【4】。

[1] の確率は単に満期に $S(T)$ がバリアー価格以上と言う条件なので、これはプレインバニラオプションで積分範囲を K の代わりに B を代入した確率に一致する。従って、

(1)　$$C_2 = S(t)\Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

ここで、

(2)　$$d_2 = \frac{\ln\frac{S(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。

C_{II} の計算は前回における m を使って表現することができる【4】、【5】。いま、$S(\cdot)$ が B よりずっと小さい $Z(t)$ から出発して満期 T で $(K \leq B \leq) S(T)$ に到達する経路に注目し、この経路上で初めて B に到達する時点を t_0 とする。つまり、出発点 t では $Z(t)$ であるとする。ここで $Z(t)$ は、

(3)　$$Z(t) = \frac{B^2}{S(t)}$$　：　B は $Z(t)$ と $S(t)$ の幾何平均

である。

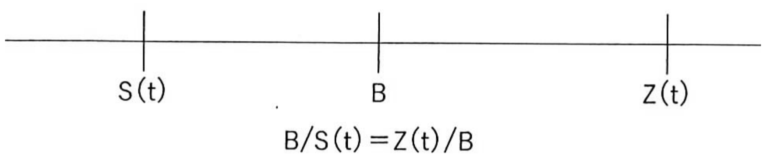

図 2.　B はスポット価格 $S(t)$ と $Z(t)$ の幾何平均である

前回と同様に、ブラウン運動の定義から系列は過去の時点や、経路に無関係なので t_0 で B に到達した後の経路は $S(t)$ を出発点としても、$Z(t)$ を出発点としても t_0 以降は全く同じ性質を持って動く。

$Z(t)$ を出発して B を超えて満期で $(K \leq B \leq) S(T)$ となるオプション価格の評価額は、途

中の行使価格には関係しないので (1) と同じようにプレインバニラオプションの積分範囲で K を B に変えることにより計算できる【4】。

(4)　$C'_{II} = C_4$

(5)　$C_4 = E\{max(0, S(T)-K)|Z(t)\}$ (期待値の積分範囲は B から無限大)

$$= Z(t)\Phi(d_4+\sigma\sqrt{T-t}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_4)$$

$$= \frac{B^2}{S(t)}\Phi(d_4+\sigma\sqrt{T-t}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_4)$$

(6)　$d_4 = \dfrac{\ln\frac{Z(t)}{B} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$,　　ここで、$Z(t)$ を $S(t)$ で表して、

(7)　$d_4 = \dfrac{\ln\frac{B}{S(t)} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

以上をまとめると、

(8)　$C = C_I - C_{II} = C_I - mC'_{II} = C_2 - mC_4$

(9)　$m = \left(\dfrac{B}{S(t)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}$

を得る。

8．J による Down and Out Call (B $\geq$ K) の場合の評価式

J による関数で、バリアーオプションの評価式をつくり数値を求める。一方、シミュレーションによってブラウン運動の系列を発生させ、バリアーに到達したらプレインバニラオプションを消滅させることで、バリアーオプションの価格の期待値を計算して理論値と比較してみた。その結果、1 ケ月に 1 回変動する幾何ブラウン運動のシミュレーションでは、バリアーに到達する確率が小さくなるので評価額は高めに出がちである。そこで 1 週間に 1 回、3 日に 1 回変動させてゆくシミュレーションを行うと、細かくする程理論値に近づいてゆくことが分かった。

まず恒例により、正規分布に関する J の関数を定義する。ただし、バージョン $J6$ に準拠しているので、$J5$ 以前のバージョンでは引数 x、y を x.、y. に変えなければならない。

```
NB. Normal Distribution
   stnormal=:(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
   NP=:3 : 0
(stnormal y)*y%(-‘%‘+‘%)/,(>:+:k),.(*:y)*>:k=.i.28
)
   NQ=:3 : 0
(stnormal y)*%‘+/1,,y ,.>:i.28
)
   Ndist=:3 : 0
if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
if. 0<:y do. q=:1-q end.
)
NB. Yamanouti’s Formula
   Ninv_y=:3 : 0
```

```
z=.-^.4*y*(1-y)
x=.%:z*(2.0611786-5.7262204%(z+11.640595))
if. y>0.5 do. x=.-x end.
)
NB. Normal Random Numbers
NB.    Rndm_Norm Size Mu Sigma
   Rndm_Norm=:3 : 0
'Num Mean Sigma'=.y
Mean+Sigma*Ninv_y"0 (?Num#10000000)%10000000
NB.{.Ninv_bm"1 z=:(?(Num,2)$10000000)%10000000
)
```

●以下がバリアーオプション No.10 の価格式である。

```
NB. ==============================================================
NB. Barrier Option Pricing Model No.10
NB. J.Takeuchi Feb. 2009
NB. Usage: Barrier10 data
NB. data is a list ( 6 menbers)
NB. SpotPrice StrikePrice BarrierPrice Term(Month) Sigma FreeRate
NB. ex. data=. 120 90 100 6 30 5
NB. ==============================================================
   Barrier10=:3 : 0
'Spot Kosi Barrier Term Sigma Rate'=. y
Ter=:Term%12[Sig=:Sigma%100[Rat=:Rate%100
m=.(Barrier%Spot)^((2*Rat%Sig^2)-1)
er=.^-Rat*Ter
d2=.ddd Spot,Barrier
d4=.ddd Barrier,Spot
C2=.(Spot*Ndist(d2+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d2)
C4=.(((Barrier^2)%Spot)*Ndist(d4+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d4)
C=.C2-m*C4
)
NB.==============================================================
NB.ddd Numerator(Bunsi),Denominator(Bunbo)
NB.Usage : ddd Spot,Barrier
NB.==============================================================
   ddd=:3 : 0
'Nume Deno'=.y
((^.Nume%Deno)+(Rat--:*:Sig)*Ter)%Sig*%:Ter
)
```

●シミュレーションのリストは前回と全く同じである。なお、リスト中の 1/12 は月単位

で計算するための定数でこれを小さくすれば 1 年をより細かく分けることができる。

```
NB.=============================================================
NB.Simulation for Barrier Option Type 10
NB.Numbers Barrier_10 Spot Kousi Barrier Term Volatility Rate
NB.=============================================================
   Barrier_10=:4 : 0
'S0 K B T Vol r'=.y
i=.0[Smin=.S=.MM#S0[MM=.x
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(%:1%12)*z
Smin=.S<.Smin
NB. print S
goto_L1.
label_owari.
w=.(S-K)*(p=:Smin>B)
NB. w=.(S-K)
C=.(^-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)#w
)
NB. ===============================================
NB. Plain Vannila Option Model(Black-Scholes)
NB. a(Spot) b(Strike) c(Term) d(Volatility) e(Rate)
NB. ===============================================
bs =: 3 : 0
'a b c d e'=. y
t=. c % 12
u=. (^. a % b) + t* (e1=.e % 100) - -:(bor=.d % 100) ^2
p2=. u % (bor * %: t)
p1=. p2 + bor * %: t
n1=. Ndist p1
n2=. Ndist p2
bs=. (a * n1 ) - b *n2 *( ^ (-e1) * t)
)
NB. =========================================
```

●まず、今回の例題から、スポット価格 120 円、
行使価格 90 円、バリアー価格 100 円、オプション期間 6ヶ月、
リスクフリー金利 5%、ボラティリティ30%では、

```
   Barrier10 120 90 100 6 30 5
```

27.9592
シミュレーションでは、
```
1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5
```
29.4546
```
1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5
```
30.8357
```
1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5
```
30.361
```
1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5
```
30.1727
やや大き目に出てくる。シミュレーション回数を増やすと、
```
10000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5
```
30.4581
```
10000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5
```
30.8642
```
10000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5
```
30.9574
系統的におかしいことが分かる。
これまでは 1 年を 12ヶ月として年 12 回に区切って実行したものである。
それでは間隔が広すぎで、本来連続であるべきなので月単位を修正して、
シミュレーションの 1/12 を、1/60(ほぼ週単位)、1/120(3 日単位) にすると、
1/60 では、
```
1000 Barrier_10 120 90 100 30 30 5
```
29.0978
```
10000 Barrier_10 120 90 100 30 30 5
```
29.035
1/120 では
```
1000 Barrier_10 120 90 100 60 30 5
```
27.4645
```
10000 Barrier_10 120 90 100 60 30 5
```
28.9223
何となく理論値の 27.9592 に近づいてゆくようである。
少なくとも 1/12 ではシミュレーションでは間隔が粗すぎるといえる。
ところで 1/120 でバリアーを下げてゆくと、
```
10000 Barrier_10 120 90 95 60 30 5
```
31.3524
```
10000 Barrier_10 120 90 92 60 30 5
```
31.9407
```
10000 Barrier_10 120 90 90 60 30 5
```
32.0345

となり、プレインバニラの 32.8962 に近づく過程がよく分かる。

```
   bs 120 90 6 30 5
32.8962
```

●最後に参考のため、1/120 のときの Barrier_10 の J リストを掲げておく。

```
NB.==============================================================
NB.Simulation for Barrier Option Type 10
NB.Numbers Barrier_10 Spot Kousi Barrier Term Volatility Rate
NB.==============================================================
   Barrier_10=:4 : 0
'S0 K B T Vol r'=.y
i=.0[Smin=.S=.MM#S0[MM=.x
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%120))+S*(Vol%100)*(%:1%120)*z
Smin=.S<.Smin
NB. print S
goto_L1.
label_owari.
w=.(S-K)*(p=:Smin>B)
NB. w=.(S-K)
C=.(^-(r%100)*(T%120))*MM%~+/(0<w)#w
)
```

【参考文献】

【1】山下司 (2001)：オプションプライシングの数理　―基礎理論と専門書のブリッジテキスト―　金融財政事情研究会 (金融工学全般の良い、分かり易い解説書)

【2】竹内寿一郎・本田皓士（2006)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その１　―キャッシュデジタルとプレインバニラオプション―　JAPLA 2006 シンポジウム　2006.12.9 資料 (ブラック・ショールズの式の解説)

【3】竹内寿一郎（2008)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その６　―バリアーオプションの価格式 (1) ―　JAPLA2008　夏合宿 2008.8.02-04 資料 (バリアーオプション全般の解説)

【4】竹内寿一郎（2008)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その７　―バリアーオプションの価格式 (2) ―　JAPLA 2008 シンポジウム　2008.12.6 資料 (バリアーコールオプションの解説)

【5】竹内寿一郎（2009)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その８　―バリアーオプションの価格式 (3) ―　JAPLA 研究会 2009.1.24 資料 (Down and Out Call ($B \leq K$) の場合の評価式)