

差分グリッドを用いた微分方程式の数値計算 (0)

2 階微分方程式

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.com

2009 年 12 月 8 日

目次

1	差分グリッドと微分方程式	1
1.1	テーラー展開と差分	2
1.2	境界条件	3
2	2 階微分方程式と差分グリッド	3
2.1	ディリクレ条件での基本公式	3
2.2	差分グリッド	4
2.3	もう一つの差分グリッド	5
2.4	Worked Example	6
2.5	Script と解説	10
3	ノイマン・ロビン境界条件と差分グリッド	12
4	境界条件による差分グリッドの一覧	14
4.1	Worked Example	16
5	References	18
付録 A	Script	18

概要

微分方程式の楽しみの一つはいきなりシュミレーションができることにある。蛹から孵ったのは蝶か蛾かをグラフを描きながら鑑賞できる。

*1

1 差分グリッドと微分方程式

差分はデジタル積分である。積分は微分の逆計算であるアナログが中心であったが、コンピュータシヨナル・グリッドを用いた微分方程式、偏微分方程式の数値解法が活用されている。

数値解法には次のような手順が必要である。

- 関数のスクリプトの作成
- 差分マトリクスの作成
- 被説明変数ベクトルの作成
- 境界条件の設定
- システム方程式の計算
- グラフの作成

1.1 テーラー展開と差分

テーラー展開から前進差分、後退差分、中心化差分の式が得られる。

テーラー展開

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

$h = x - a$ と置く

$$f(x) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

$f(x+h), f(x-h)$ を導出する

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{6} \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{6} \dots$$

*1 本稿ではJ式表記法を併用している。

$\frac{-1}{1} \rightarrow _1$
 $\frac{1}{32} \rightarrow 1r32$

h が十分小さいものとして大胆に h^2 以降を無視すると次の差分の式が得られる

$$\begin{aligned} \text{前進差分} \quad f'(x) &= \frac{df}{dx} = \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) \\ \text{後退差分} \quad f'(x) &= \frac{df}{dx} = \frac{1}{h} (f(x) - f(x-h)) \\ \text{中心化差分} \quad f'(x) &= \frac{df}{dx} = \frac{1}{2h} (f(x+h) - f(x-h)) \end{aligned}$$

精度の良い中心差分が多く用いられるが、前進差分、後退差分も用いられる。

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{1}{2h} (f(x+h) - f(x-h))$$

中心化 2 階差分も求める

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))$$

1.2 境界条件

境界条件には出港、入港ともに棧橋にしっかり付ける [ディリクレ条件] と片方は仮棧橋や舳の [ノイマン・ロビン] 条件がある。境界条件により、コンピュータシヨナル・グリッドの組み方も若干異なる。

境界条件 微分時に無明の彼方に消えた関数の定数項が積分定数として黒衣をまとい復活する。オイラー法やルンゲ・クッタ法は関数と初期条件を与えて右側はフリーで積分で数値解を求める。

これに対し、座標の始端と終端に制限がある場合は差分格子を用いた解法が適している。

ディリクレ境界条件 ディリクレ境界条件は両端に実数をとる。(初期値と終端値)

ノイマン境界条件 始点と勾配などのパラメータを与える

境界条件の設定 境界条件は物理公式のシュミレーションでは計算法と合わせ詳細に検討が必要であるがここでは体験にとどめる

ディリクレ *Johan Peter Gustav Lejenue Dirichlet* (1805-1859)

家族はベルギーの出身で父はドイツで郵便局長の職にあった。ボン大学を卒業。後年ベルリン、ゲッチンゲン大学で教える。メンデルスゾーンの妹と結婚したことで知られる。

かのマッハの教えを受けた。弟子にクロネッカやリブシッツがいる。

フェルマーの定理 ($n=5$) の証明をルジャンドルと競い、 $n = 14$ の証明を行った。

2 2階微分方程式と差分グリッド

2.1 ディリクレ条件での基本公式

2階微分方程式

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$$

ディリクレ条件

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

コンピュータシヨナル・グリッドに載せる2階微分方程式

$$\{y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)\}|_x = x_i \quad (1 \leq i \leq N-1)$$

中心化2階差分の式

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2) = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i + r_i + O(h^2)$$

p_i, q_i, r_i を用い、式の $y \rightarrow w$ への変更 (エグザクトから推計へ)

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q_i w_i + r_i$$

境界条件 $y(x_0) = \alpha, y(x_N) = \beta$ の2式を加え $y \rightarrow w$ に変更

2階微分方程式の基本差分公式

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} &= p_i \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q_i w_i + r_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ w_N &= \beta \end{aligned}$$

2.2 差分グリッド

- x_0, x_N は境界グリッドポイント (既知)
- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}$ は内部グリッドポイント (未知数)
- $x_i = a + ih$
 $h = \frac{b-a}{N}$, h はステップサイズまたはメッシュサイズ
- 線形計算 $Aw=b$ を用いる

$$l_i = -1 - \frac{h}{2}p_i$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{N-2} \\ w_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad b = \begin{bmatrix} -h^2 r_1 + (1 + \frac{h}{2}p_1)\alpha \\ -h^2 r_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} + (1 - \frac{h}{2}p_{N-1})\beta \end{bmatrix}$$

A は, l_i, d_i, u_i に h や p_i, q_i が入った数値マトリクスになる。

2.3 もう一つの差分グリッド

こちらの方が良く用いられる

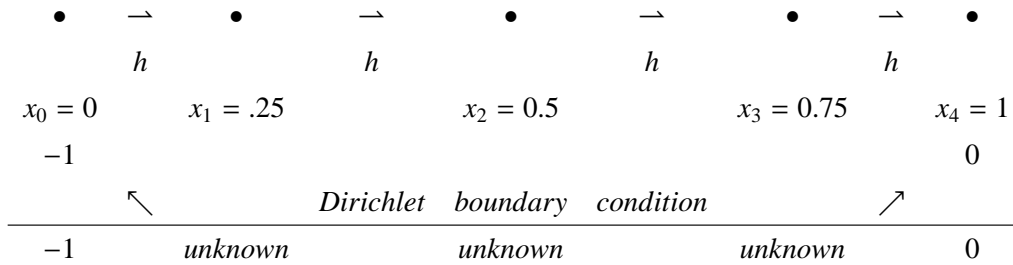
基本差分公式

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ \left(-1 - \frac{h}{2}p_i\right)w_{i-1} + (2 + h^2q_i)w_i + \left(-1 + \frac{h}{2}p_i\right)w_{i+1} &= -h^2r_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ w_N &= \beta \end{aligned}$$

$A\mathbf{w} = \mathbf{b}$

A は $(N+1)(N+1)$ の三角対重行列

境界条件 .



関数のセット .

$$p_1 = -(x_i + 1) = -(1 + \frac{i}{4})$$

$$q_i = 2$$

$$r_i = (1 - x_i^2)e^{-x_i} = (1 - (\frac{i}{4})^2)e^{-\frac{i}{4}}$$

- i, y を関数側で定義している。

NB. Demonstration problem 2

NB. $u' = -(x+1)u' + 2u + (1-x^2)e^{-x}$

NB. $h=1/4, N=4, u(0,1)=-1, 0$

fp2=: 3 : '->:(i. >: y) % y' NB. p'

fq2=: 2: NB. q

fr2=: 3 : '(1 - y0^2) * ^ - y0=. (i. >: y) % y' NB. r

- 左引数は関数とする。
- 関数を引数とする Script は副詞型 (1 : 0) で記述する
(fp2;fq2;fr2) calc_mat_2nddif 1r4;4;_1 0
- i, y は関数側で記述するように統一した。
- N は $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ まで 0 オリジンで一つ多く取る。(Newman,Robin で境界条件計算のため必要となる)

差分マトリクスと線形フォーム .

- Dirichlet の境界条件の箇所をを差分マトリクスの最初と最後の行に 1 で指定する。
- 従属変数行列の最初と最後に -1,0 で数値を与える

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
 1 & 0 & & & & w_0 & -1 \\
 -27r32 & 17r8 & -37r32 & 0 & 0 & w_1 & -0.0456329 \\
 0 & -13r16 & 17r8 & -19r16 & 0 & w_2 & -0.0284311 \\
 & 0 & -25r32 & 17r8 & -39r32 & w_3 & -0.0129163 \\
 & & & 0 & 1 & w_4 & 0
 \end{array}$$

計算例 .

- x (fp2;fq2;fr2) ボックスで関数を与える
- y (h;N; ディリクレ境界条件) ex. 1r4;4;_1 0

```
(fp2;fq2;fr2) calc_mat_2nddif 1r4;4;_1 0
```

```

+-----+-----+
| 1 0 0 0 0 | _1 _1 |
|_27r32 17r8 _37r32 0 0|_0.0456329 _0.582559|
| 0 _13r16 17r8 _19r16 0|_0.0284311 _0.301452|
| 0 0 _25r32 17r8 _39r32|_0.0129163 _0.116906|
| 0 0 0 0 1 | 0 0 |
+-----+-----+

```

プロット .

plot 用に $h = 1r10$ とする。 $\Delta x = 0.1$ になる。

```

]a=(fp2;fq2;fr2) calc_mat_2nddif 1r10;10;_1 0
'line,marker'plot (0.1*>:i.11 );{: "1 ; {: a

```

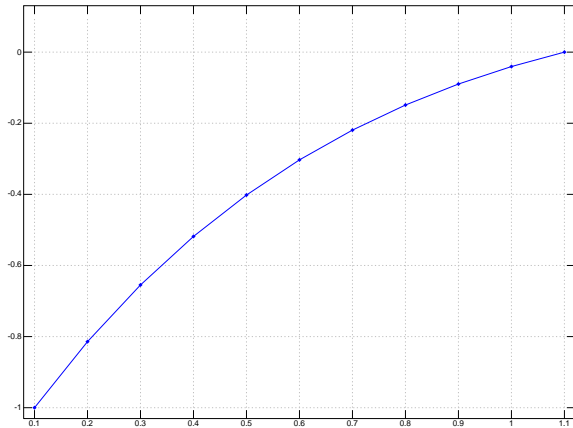


図 1

2.4.2 Demonstration Problem 1

Bradie Example 8.1

EXAMPLE .

formula $-u'' + \pi^2 u = 2\pi^2 \sin(\pi x)$

boundary condition $u(0) = u(1) = 0$

h $\frac{1}{4}$

N $x_i = \frac{1}{4}$

関数の定義 .

$p(x) = 0$

$q(x) = \pi^2$

$r(x) = -2\pi^2 \sin(\pi x)$

NB. Bradie P668

NB. Dirichlet boundary condition

NB. Demonstration problem 1

fp1=: 0: NB. p

fq1=: 3 : '1p2*1' NB. * 1 is alternate of 1p2: NB. q

fr1=: 3 : '_2p2 * 1 o. 1p1 * (i. >: y) % y' NB. r

0: 0 を返す関数

1p2*1 引数を取らないように 1 を掛けて打ち止め

1 o. 円関数 *sin*

計算例 .

```

clean L:0 (fp1;fq1;fr1) calc_mat_2nddif 1r4;4;0 0
+-----+-----+
| 1      0      0      0 0|      0      0|
|_1 2.61685      _1      0 0|0.872358 0.725371|
| 0      _1 2.61685      _1 0| 1.2337 1.02583|
| 0      0      _1 2.61685 _1|0.872358 0.725371|
| 0      0      0      0 1|      0      0|
+-----+-----+
                        diff  mat                wi      ans

```

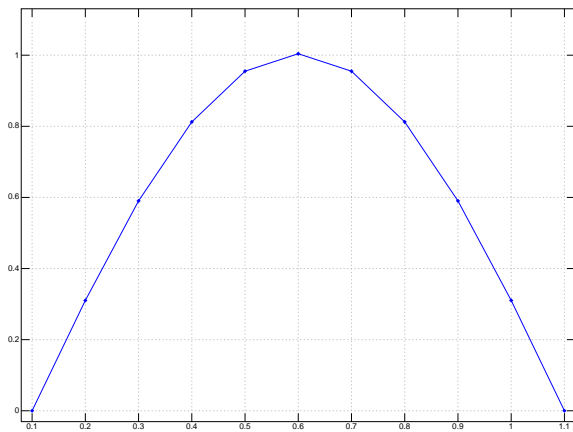


図 2

plot

2.5 Script と解説

- 複数の関数をボックスで引数に取る
- 任意の関数引数に取ることができる副詞型 (1 : 0) とする

```

NB. Usage: (fp2;fq2;fr2) calc_mat_deriv 1r4;4;_1 0
calc_mat_2nddif =: 1 : 0

```

- 関数は左引数とし u で受ける。
- $L:0$ で関数のボックスの中の 3 の関数 $fp2;fq2;fr2$ を同時に計算する

```

f=: u L:0 IX

```

- l_i, d_i, u_i を計算する。 w_{i-1}, w_i, w_{i+1} となる

```

X0=: _1- (-: H) * ;{. f
X1=: 2+ (H^2) * ;1{f
X2=: _1+ (-: H) * ;{. f

```

- w_{i-1}, w_i, w_{i+1} はスカラーやベクトルが混在する。これをマトリクスに整形する。(相当複雑)

```

XX=: IX adjust_length_sub X0;X1;X2

```

```

      4 adjust_length_sub 1 ; 2; 3 4 5 6
1 2 3
1 2 4
1 2 5
1 2 6

```

- 複数の 0 列を加える
- $n \mid "0$ 1 で各行を任意に捻ることができる
- ランク " 0 1 の作用で差分型に捻る。

```

      0 _1 _2 _3 |."0 1 ] i. 4 4
      0 1 2 3
      7 4 5 6
     10 11 8 9
     13 14 15 12

```

```

M0=. }.}: |: (|: XX), ;("1),.(IX-2)#<IX#0 NB. drop top(a1x) and last(aNx) line
MX=. (1, IX#0),M0,(IX#0),1 NB. add top and last line
M1=. ((0,- i.<: IX),0)|."0 1 MX NB. twisted

```

- *Dirichlet* 用にマトリクスの上に 1 を左端に付加し、他は 0 とする一行を、最下に 1 を右端とし他は 0 とする一行を加える

```

MX=. (1, IX#0),M0,(IX#0),1

```

- 従属変数 y を計算する。最初と最後の行はディリクレ条件の数値に入れ替える

```

Y0=. -(H^2)* ;{:f NB. y
YX=. ({.U),({. }): Y0),{:U

```

- この関数の本体。線形計算のみ $YX \% M1$
 $M1;YX, . YX \% M1$ NB. calc differential equation

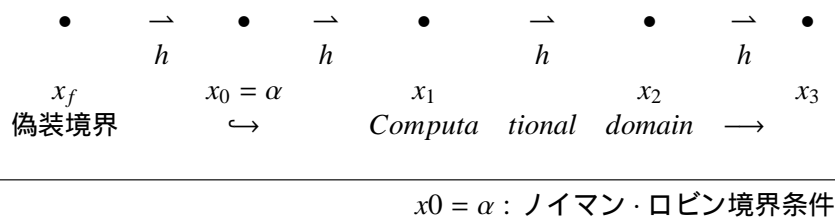
3 ノイマン・ロビン境界条件と差分グリッド

カール・ノイマン Carl Neumann(1832-1925) 物理学者フランツ・ノイマンの息子。父はケニッヒス・ベルク大学の教授を 50 年務めた。ドイツ騎士団が拓いた東プロセインのこの町はカントが活躍し、ヒルベルトも生まれている。

父フランツが数学者ヤコビと開催した数学・物理ゼミナールはケニッヒスベルク学派と呼ばれ、ドイツを担ったキルヒホフ、ヘッセ、C. ノイマンなど多くの学者がでた。

Dirichlet 条件	$u(0, t) = u(l, t) = 0$	のように境界で u の値が与えられる
Neumann 条件	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	のように境界で $\frac{\partial u}{\partial x}$ の値が与えられる
Robin 条件	$\frac{\partial u}{\partial x} + hu = T$	のように境界において外界への熱などの「放散」が起きているとき

左が Newman/Robin 境界条件の図 .



ノイマン境界条件*2

$$\begin{aligned} y'(a) &= \alpha \\ y'(b) &= \beta \end{aligned}$$

ロビン境界条件

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3$$

この式から始める

*2 ロビン境界条件のスペシャルケースである

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$$

computational template

$$\left(-1 - \frac{h}{2}p_i\right)w_{i-1} + (2 + h^2q_i)w_i + \left(-1 + \frac{h}{2}p_i\right)w_{i+1} = -h^2r_i$$

仮想ノード w_F を入れた $x = x_0$ を含む微分方程式

$$\left(-1 - \frac{h}{2}p_0\right)w_f + (2 + h^2q_0)w_0 + \left(-1 + \frac{h}{2}p_0\right)w_1 = -h^2r_0$$

ロビン条件を全て求める

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3 \implies \alpha_1 w_0 + \alpha_2 \frac{w_1 - w_f}{2h} = \alpha_3$$

w_f を求める

$$w_f = w_1 \frac{2h}{\alpha_2} (\alpha_3 - \alpha_1 w_0)$$

$x = a$: としたロビン境界条件での差分式

$$\left[2 + h^2q_0 \quad -(2 + hp_0)h \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right] w_0 - 2w_1 = -h^2r_0 - (2 + hp_0)h \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

ノイマン境界条件 $\alpha_1 = 0$ での差分式

$$(2 + h^2q_0)w_0 - 2w_1 = -h^2r_0 - (2 + hp_0)h\alpha$$

ロビン境界条件 $x = b$ での差分式

$$-2w_{N-1} + \left[2 + h^2q_N \quad +(2 - hp_N)h \frac{\beta_1}{\beta_2}\right] w_N = -h^2r_N + (2 - hp_N)h \frac{\beta_3}{\beta_2}$$

ノイマン境界条件 $x = b$ での差分式

$$-2w_{N-1} + (2 + h^2q_N)w_N = -h^2r_N - (2 - hp_N)h\beta$$

マトリクスフォーム

- $a_{N+1,N+1}$

$$a_{N+1,N+1} = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet BC } x = b \\ d_N & \text{Neumann BC } x = b \\ d_N - 2hu_N\beta_1/\beta_2 & \text{Robin BC } x = b \end{cases}$$

- $a_{N+1,N}$

$$a_{N+1,N} = \begin{cases} 0 & \text{Dirichlet BC } x = b \\ -2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- b_1

$$b_1 = \begin{cases} \alpha & \text{Dirichlet BC } x = a \\ -h^2r_0 + 2hl_0\alpha & \text{Neumann BC } x = a \\ -h^2r_0 + 2hl_0\alpha_3/\alpha_2 & \text{Robin BC } x = a \end{cases}$$

- b_{N+1}

$$b_{N+1} = \begin{cases} \beta & \text{Dirichlet BC } x = b \\ -h^2r_N - 2hu_N\beta & \text{Neumann BC } x = b \\ -h^2r_N - 2hu_N\beta_3/\beta_2 & \text{Robin BC } x = b \end{cases}$$

4.1 Worked Example

Bradie Example 8.3

$$u'' + u = \sin(3x), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Robin 境界条件 $x = 0$

$$u(0) + u'(0) = -1$$

Newman 境界条件 $x = \frac{\pi}{2}$

$$u'(\frac{\pi}{2}) = 1$$

uniform partition $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$h = \frac{i\pi}{8}, \quad \text{for } i = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$p_i = 0$$

$$q_i = 1$$

$$r_i = \sin(\frac{3i\pi}{8})$$

Robin 境界条件 $x = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$

Newman 境界条件 $x = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 1$

$$\begin{bmatrix} d - \frac{\pi}{4} & -2 & & & \\ -1 & d & -1 & & \\ & -1 & d & -1 & \\ & & -1 & d & -1 \\ & & & -2 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ (\frac{\pi}{8})^2 \sin(\frac{3\pi}{8}) \\ (\frac{\pi}{8})^2 \sin(\frac{6\pi}{8}) \\ (\frac{\pi}{8})^2 \sin(\frac{9\pi}{8}) \\ (\frac{\pi}{8})^2 + \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$$d = 2 - \left(\frac{\pi}{8}\right)^2$$

```
(fp3;fq3;fr3) calc_2nddiff_all 1r8p1;4; 1 1 _1 ; 1 0 0;'RN'
```

```
+-----+
| 1.06039    _2    0    0    0| 0.785398  _1.02367|
|    _1 1.84579    _1    0    0| _0.142474  _0.935445|
|    0    _1 1.84579    _1    0| _0.109045  _0.560486|
|    0    0    _1 1.84579    _1| 0.0590146  0.00995176|
|    0    0    0    _2 1.84579| 0.939611    0.51984|
+-----+
```

y (ANS)

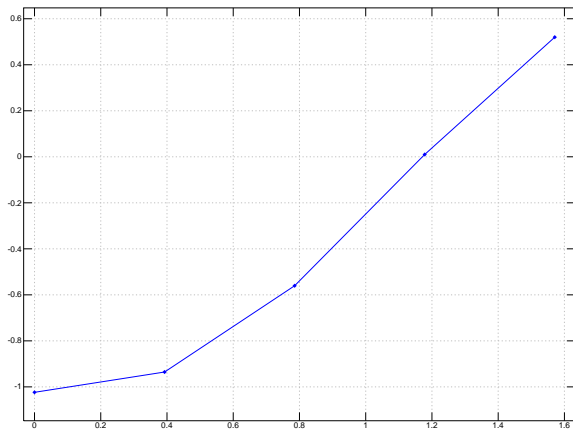


図 3

ディリクレ条件での Example 8.1 のテスト (OK)

```
clean L:0 (fp1;fq1;fr1) calc_2nddiff_all 1r4;4;0 0 0; 0 0 0;'DD'
```

```
+-----+
| 1    0    0    0 0|    0    0|
| _1 2.61685    _1    0 0| 0.872358  0.725371|
+-----+
```

```
| 0      _1 2.61685      _1 0| 1.2337 1.02583|
| 0      0      _1 2.61685 _1|0.872358 0.725371|
| 0      0      0      0 1|      0      0|
+-----+-----+
```

ANS

5 References

Brain Bradie [A friendly Introduction to Numeric Analsis] Pearson 2006

付録 A Script

```
calc_mat_2nddif =: 1 : 0
NB. Usage: (fp2;fq2;fr2) calc_mat_2nddif 1r4;4;_1 0
NB. another // mat_lp (1r10; 10;_1 0)
'H IX U'=. y NB. h ; x(i.n); u(0,1)
f=. u L:0 IX NB. add N+1 is done at fpx side
X0=. _1- (-: H) * ;{. f
X1=. 2+ (H^2) * ;1{f
NB. if. 1=# X1 do. X1=: IX # X1 end.
X2=. _1+ (-: H) * ;{. f
NB. below is expand singleton(because error occure at 1,.1 2 3)
XX=. IX adjust_length_sub X0;X1;X2
NB. - y-----
Y0=. -(H^2)* ;{:f NB. y
YX=. ({.U),({. } : Y0),{:U
NB. except top(y0) and lasy(yn)line and append Dirichlet boundary condition
NB. ----make extended diff box-----
M0=. }.}: |: (: XX), ;("1),.(IX-2)#<IX#0 NB. drop top(a1x) and last(aNx) line
MX=. (1, IX#0),M0,(IX#0),1 NB. add top and last line
M1=. ((0,- i.<: IX),0)|."0 1 MX NB. twisted
NB. ---calc matrix -----
M1;YX,. YX %. M1 NB. calc differential equation
)
```

adjust_length_sub=: 4 : 0

```

NB. expand to same length
NB. alternative expand_box
NB. y is X0;X1;X2
NB.x is IX
LEN=. ; # L:0 y
INDEX=. +/ INDEX0=. LEN e. >: x
select. INDEX
case. 3 do. XX=. |: ;("1) ,. y      NB. all vector
case. 0 do. XX=. |: ;("1),. (>:x) # L:0 y NB. all scalar
fcase. do.
  TMP=. (>: x) # L:0 (-. INDEX0) # y NB. expand scalar
  TMP=. (INDEX0 # y), TMP      NB. marge
  IND=. (indt_sub INDEX0) i. 0 1 2      NB. expand index
  XX=. |: ;("1),. IND { TMP      NB. back to origin order
end.
XX
)

```

```

NB. find_index
indt_sub=: 3 : '(I. y),I.-.y'

```

```

NB. -----Newman/Robin boundary condition-----

```

```

NB. Bradie Example 8.3

```

```

fp3=: 0:
fq3=: _1
fr3=: 3 : ' 1 o. 3r8p1 * i. >: y' NB. sin

```

```

NB. alpha1=alpha2=1 , alpha3=_1

```

```

NB. beta=1

```

```

calc_2nddiff_all =: 1 : 0

```

```

NB. clean L:0 (fp1;fq1;fr1) cnr 1r4;4;0 0 0; 0 0 0;'DD' OK

```

```

NB. (fp3;fq3;fr3) cnr 1r8p1;4; 1 1 _1 ; 1 0 0;'RN'

```

```

'H IX ALPHA BETA TYPE'=: y

```

```

NB. h ; x(i.n); 6 disimal(alpha 1 2 3 beta 1 2 3)

```

```

NB. TYPE is 'DD', 'DN', 'DR', 'RN', 'RR' NB. 9type
f=: u L:0 IX
NB. x
X0=: _1- (-: H) * ;{. f NB. Li
X1=: 2+ (H^2) * ;1{f NB. Di
X2=: _1+ (-: H) * ;{. f NB. Ui
NB. below is expand singleton(because error occure at 1,.1 2 3)
XX=: IX adjust_length_sub X0;X1;X2
NB. - calc x and y-----
Y0=: -(H^2) * ;{: f NB. {: f is r //-h^2*r
NB. -h^2* r0 <----- body of y NB. over item is last
BX0=: ({. Y0) + +: H * {. X0 NB. (-2h^2 r0) + 2h* l_0 <-- top b1
BXN=: ({: Y0) - +: H * {: X2 NB. (-2h^2*r_n) - 2h* u_n <--bn
NB. -----
NB. ----matrix-calc a11 a12 and b1-----
NB. A11=. A12=. ANL=. ANR=. B1=. BN=. 0 NB. reset
IND0=: I. 'DNR' e. {. TYPE NB. top line of a,b
NB. Newman
  if. 0= ;IND0 do. NB. Dirichlet
    A11=. 1
    A12=. 0
    B1=. {. ALPHA
  end.
  if. 1 = ; IND0 do.
    A11=. {. X1 NB. keypoint = d0
    A12=. _2 NB. neighbore
    B1=. BX0 * {. ALPHA
  end. NB. alpha
NB. Robin
  if. 2 = ; IND0 do.
    A11=. ({.X1) + +: H * X0 * %/ 2{. ALPHA NB. alpha1/alpha2
    A12=. _2
    B1=. BX0 * %/ 2 1 { ALPHA NB. alpha3/alpha2
  end. NB. Dirichlet
  end.
NB. ----matrix-calc an-1 an2 and bn-----
IND1=: I. 'DNR' e. {: TYPE NB. last line of a,b

```

```

NB. Newman
  if. 0= ; IND1 do.    NB. Dirichlet
    ANR=. 1
    ANL=. 0
    BN=. {. BETA
  end.
  if. 1 = ; IND1 do.
    ANR=. {: X1
    ANL=. _2
    BN=. BXN * {. BETA
  end.
NB. Robin
  if. 2=;IND1 do.
    ANR=. ({: X1) - +: H * ({: X2) * ( {. BETA) % 1{. BETA NB. beta1/beta2
    ANL=. _2
    BN=. BXN * %/ 2 1 { BETA NB. beta 3/beta2
  end.
NB. -----
YX=: B1,({.}:Y0),BN NB. drop last// NB. y main
NB. ----make extended diff box-----
M0=:}. } : |: (|: XX), ;("1),.(IX-2)#<IX#0 NB. except top and last line
NB. MX=: (A1,_2,(<:IX)#0),M0,((<:IX)#0), _2,AN
MX=: (A11,A12,(<:IX)#0) , M0, ((<:IX)#0),ANL,ANR
RIND=: (0,(-&i. <: IX),0) NB. rotate index
M1=: RIND |.("0 1) MX NB. twist except top&last
NB. --main = calc matrix -----
M1 ; YX,.YX %. M1 NB. main = calc differential equation
)

```