

## エクゾチックオプション価格のシミュレーション その7 - バリアーオプションの価格式(2) -

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models - 7 -  
The Barrier Option Pricing Model(2)

(株) 竹内ハガネ商行  
竹内寿一郎

### 3 . Up and Out Call ( $B \geq K$ ) の場合の評価式

このケースは前回の No.2 に相当し<sup>[4]</sup>、バリアー価格 (B) がスポット価格を上回っている (これを  $U_p$  という) とき、ノックアウトで、コールオプション、バリアー価格が行使価格 (K) より大きい場合である。この評価式が残りの 5 つのケースの基礎となるので、記号その他についても紛らわしくないように出来るだけ文献【1】に倣って使用することにする。たとえば、ここ 3 節では次のような取引である。

原資産	ドル円為替レート
満期	1 年後
スポット価格	120 円
バリアー価格	140 円
行使価格	130 円
オプション	ノックアウトコールオプション

現在の円の対ドル為替レートが 120 円のときの、行使価格 130 円のコールオプションではあるが、オプション期間の 1 年以内に為替レートが、1 度でも 140 円をつけたときこのオプションは消滅してしまう、ということである。そういうときの評価式を求めることになる。

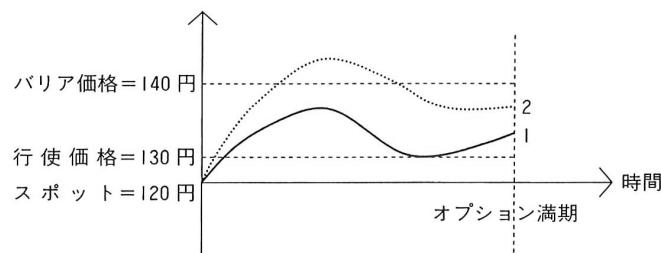


図 1 .  $U_p$  のとき、満期に価格が行使価格以上になる 2 つの経路  
(行使価格 130 円、バリアー価格 140 円、スポット価格 120 円)

バリアー価格を 140 円として、次の 2 つの経路を考える

- [1] 満期 T に価格が行使価格 130 円以上で、バリアー価格の 140 円以下になる場合 (ここでは過去の経路は一切問わない)、
- [2] オプション期間中に一度はバリアー価格 140 円以上をつけ、その後満期 T では価格が 130 円以上、140 円以下となる。

オプション期間中に一度もバリアー価格を超えず、オプション満期  $T$  に価格  $S(T)$  が、行使価格  $K$  より大きく、バリアー価格  $B$  より小さな値になっているとき、キャッシュフロー  $S(T) - K$  が得られる評価額を  $C$  (これが求める評価額)、経路 [1] での価格を  $C_I$ 、経路 [2] での価格を  $C_{II}$  で表すとすると、

$$C = C_I - C_{II}$$

と書くことができる。

満期時に  $K \leq S(T) \leq B$  なる条件が付くのは、 $S(T)$  が行使価格より小であればアウトオブザマネー (OTM: 利得はゼロ) になってしまうし、バリアー価格以上であればオプションが消滅するからである。

このとき、経路 [2] は経路 [1] の部分であり、バリアーに到達すること無く価格  $S(T)$  が行使価格  $K$  以上、バリアー価格以下になる確率は [1] の確率から [2] の確率を引けばよい。すなわち、このときの評価額は [1] のときの評価額  $C_I$  から [2] のときの評価額  $C_{II}$  を引けば良いことになる。

そこでまず、満期に価格が行使価格以上、バリアー価格以下なるとき、キャッシュフロー  $S(T) - K$  を得るオプションの評価額  $C_I$  を計算してみよう。

$C_1$ : 満期  $T$  で価格が行使価格以上、バリアー価格以下のときの価格

$C_2$ : 満期  $T$  で価格が行使価格以上、かつバリアー価格以上のときの価格

とすると  $C_I$  は

$$C_I = C_1 - C_2$$

で表される。

[1] の確率は満期に行使価格以上であり (当然) かつ、価格がバリアー価格以下になる確率であることから、バリアーを考えないときの確率 (プレーンバニラオプションの確率) から、バリアー価格以上になる確率を引けばよい。従って、 $C_I$  は  $C_1 - C_2$  から求めることができる。

これまでのように価格  $S(T)$  が幾何ブラウン運動をすると仮定すると、

$$(1) \quad dS(T) = rS(T)dt + \sigma S(T)dz$$

なる確率微分方程式を満たす。ここで、 $r$  は公平なる利率 (無リスク世界における金利)、 $\sigma$  は  $S(T)$  のボラティリティ、 $dz$  は標準ブラウン運動の増分を表している。

そこで始めの時点  $t$ 、満期  $T$  とし、伊藤の定理、さらにブラウン運動の分散が  $\sigma^2 \times$  時間であることを考慮すると [2]、

$$(2) \quad \frac{\{\ln S(T)/S(t)\} - (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \sim \text{標準正規分布}$$

であることから、満期  $T$  においてキャッシュフロー  $S(T) - K$  を得るオプションの評価額は、

$$(3) \quad C_1 = E\{Max(0, S(T) - K)\} = \int_K^\infty (S(T) - K)f(S(T))dS(T)$$

ここで、 $f(S(T))dS(T)$  は  $S(T)$  の確率分布で (2) の変換により標準正規分布にしがう。同じように  $C_2$  は (3) で積分範囲の下限が  $K$  ではなく、 $B$  であることにより、

$$(4) \quad C_2 = E_B\{Max(0, S(T) - K)\} = \int_B^\infty (S(T) - K)f(S(T))dS(T)$$

が得られる。従って  $C_I = C_1 - C_2$  は、

$$(5) \quad C_I = \int_K^\infty (S(T) - K)f(S(T))dS(T) - \int_B^\infty (S(T) - K)f(S(T))dS(T)$$

第1の式はプレーンバニラコールオプションと全く同じなので (【補遺】参照)、

$$(6) \quad C_1 = S(t)\Phi(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_1)$$

ここで、

$$(7) \quad d_1 = \frac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。

第2の式は積分範囲が  $(B, \infty)$  でしかもデジタルオプションの式において、 $B$  にならずに相変わらず  $K$  であるところがプレーンバニラオプションと異なっている。

$$(8) \quad C_2 = S(t)\Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

ここで、

$$(9) \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。 $S(T)$  がバリアー価格  $B$  以上になっても得られるプレーンバニラオプションでのキャッシュフローは  $Max(0, S(T) - B)$  ではなく、 $Max(0, S(T) - K)$  であるからである。ただし、このオプションではバリアーを越えているのでこのオプションの利得は勿論ゼロになる。 $C_2$  は満期  $T$  で  $S(t)$  がバリアー価格以上の時に得られる利得から計算された評価額である。

$C_I$  は上記のように簡単に求められたが、 $C_{II}$  の計算は簡単ではない。いま、 $S(\cdot)$  が  $B$  より大きい  $Z(t)$  から出発して満期  $T$  で  $K \leq S(T) \leq B$  に到達する経路に注目し、この経路上で初めて  $B$  に到達する時点  $t_0$  とする。つまり、出発点  $t$  では、

$$(10) \quad Z(t) = \frac{B^2}{S(t)} \quad : \quad B \text{ は } Z(t) \text{ と } S(t) \text{ の幾何平均}$$

であるとする。

図2.  $B$  はスポット価格  $S(t)$  と  $Z(t)$  の幾何平均である

ブラウン運動の定義から系列は過去の時点や、経路に無関係なので  $t_0$  で  $B$  に到達した後の経路は  $S(t)$  を出発点としても、 $Z(t)$  を出発点としても  $t_0$  以降は全く同じ性質を持って動く。

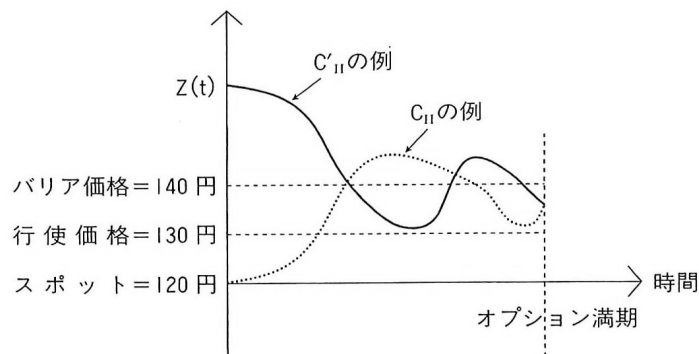


図3.  $C_{II}$  と  $C'_{II}$  との違いの図

そこで  $Z(t)$  を出発点として満期でキャッシュフロー  $S(T) - K$  を得る経路に対する評価額を  $C'_{II}$  とすると、 $S(t)$  を出発点とする経路に対する評価額  $C_{II}$  との違いは、出発点から  $B$  に初めて到達する確率の違いだけに起因するものであることが分かる。従って、その違いだけを考慮すれば  $C'_{II}$  から  $C_{II}$  を求めることが出来る。そこでまず  $C'_{II}$  を求めてみる。

$Z(t)$  を出発して  $B$  を超えて満期で  $K \leq S(T) \leq B$  となるオプション価格の評価額は、途中のバリアーには関係しないので (3) と同じようにプレーンバニラオプションの期待値で、積分範囲を変えた式として (6)、(8) に倣って

$$(11) \quad C'_{II} = C_3 - C_4$$

$$(12) \quad \begin{aligned} C_3 &= E_K^\infty \{ \max(0, S(T) - K) | Z(t) \} \text{ (ここでの期待値の積分範囲 } K \text{ は無くてもよい)} \\ &= Z(t) \Phi(d_3 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)} K \Phi(d_3) \\ &= \frac{B^2}{S(t)} \Phi(d_3 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)} K \Phi(d_3) \end{aligned}$$

$$(13) \quad d_3 = \frac{\ln \frac{Z(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} C_4 &= E_B^\infty \{ \max(0, S(T) - K) | Z(t) \} \text{ (ここでの期待値の積分範囲 } B \text{ に注意)} \\ &= Z(t) \Phi(d_4 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)} K \Phi(d_4) \\ &= \frac{B^2}{S(t)} \Phi(d_4 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)} K \Phi(d_4) \end{aligned}$$

$$(15) \quad d_4 = \frac{\ln \frac{Z(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

ここで (13)、(15) に (10) を代入して、

$$(16) \quad d_3 = \frac{\ln \frac{B^2}{KS(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$(17) \quad d_4 = \frac{\ln \frac{B}{S(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

を得る。

$C'_{II}$  から  $C_{II}$  へ

前にも述べたとおり、 $C'_{II}$  と  $C_{II}$  の違いは  $S(t)$  もしくは  $Z(t)$  から  $B$  へ到達するまでの確率の違いだけで、 $B$  へ到達してからの経路はブラウン運動の仮定から、満期  $T$  で  $K \leq S(T) \leq B$  となる確率は同じである。そこで  $S(t)$  が  $B$  に到達する確率と  $Z(t)$  が  $B$  に到達する確率を比較してみる。

いま、期間  $T-t$  を十分大きな  $n$  で分割して  $T-t = n\Delta t$ ,  $t_i = t + i\Delta t$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とし、 $S(t)$  からスタートした系列が初めて  $t_i$  で  $B$  に到達する確率を  $p_i$ 、 $S(t_i) = B$  を始めのスポット価格とし、満期  $T$  でキャッシュフロー  $S(T) - K$  を得るようなオプション価格を  $c_i$  とすると、

$$(18) \quad C_{II} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-ri\Delta t} p_i c_i$$

と書ける。

同様な理由で  $t$  でスポット価格  $Z(t)$  から出発し、 $t_i$  で初めて  $B$  に達する確率を  $q_i$  とし、 $t_i$

から先の経路は同じであることから、この時点の評価額が  $c_i$  であることを用いて、

$$(19) \quad C'_{II} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-ri\Delta t} q_i c_i$$

と書くことができる。(図3.参照)

ここで次の確率を定義する。

$P_i$  :  $S(t)$  を出発して  $S(t_i) = B$  である確率

$Q_i$  :  $Z(t)$  を出発して  $S(t_i) = B$  である確率

$p_i, q_i$  は  $t_i$  で初めて  $S(t_i) = B$  となる確率であったが、 $P_i, Q_i$  は  $t_i$  で  $S(t_i) = B$  となっている確率であるという違いである。 $S(\cdot)$  が幾何ブラウン運動をするという(2)の仮定から、 $i\Delta t$  時間後に二つの系列が  $B$  になっている確率はそれぞれ

$$(20) \quad P_i = \phi \left\{ \frac{\ln(B/S(t)) - (r - \sigma^2/2)i\Delta t}{\sigma\sqrt{i\Delta t}} \right\} \Delta t$$

$$(21) \quad Q_i = \phi \left\{ \frac{\ln(B/Z(t)) - (r - \sigma^2/2)i\Delta t}{\sigma\sqrt{i\Delta t}} \right\} \Delta t = \phi \left\{ \frac{-\ln(S(t)/B) - (r - \sigma^2/2)i\Delta t}{\sigma\sqrt{i\Delta t}} \right\} \Delta t$$

ここで、 $\phi(\cdot)$  は標準正規分布の密度関数である。

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{P_i}{Q_i} &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2 i\Delta t} \left\{ \ln B/S(t) - (r - \sigma^2/2)i\Delta t \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sigma^2 i\Delta t} \left\{ -\ln B/S(t) - (r - \sigma^2/2)i\Delta t \right\}^2 \right] \\ &= \exp \left\{ \frac{4}{2\sigma^2 i\Delta t} \ln \frac{B}{S(t)} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) i\Delta t \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \ln \left( \frac{B}{S(t)} \right) \cdot \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right\} \\ &= \left( \frac{B}{S(t)} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} = m \quad (\text{この比を } m \text{ と書くことにする}) \end{aligned}$$

$P_i$  と  $Q_i$  の比は  $m$  であることが分かったが、ここで  $p_i$  と  $q_i$  の比を詳しくみてみよう。 $n$  を十分大きくとると、 $i = 1$  のとき、 $p_1 = P_1$  である。すなわち  $S(\cdot)$  が初めて  $B$  に達する確率は  $S(t_1) = B$  なる確率に等しいと考えてよい。

$i = 2$  のとき、

$$(23) \quad P_2 = v_{1,2}p_1 + p_2$$

ここで、 $v_{2,1}$  は  $t_1$  時点で  $B$  にいる  $S(t \cdot)$  が  $t_2$  時点で  $S(t_2) = B$  となる確率を表すものとする。同じように、

$$(24) \quad P_3 = v_{1,3}p_1 + v_{2,3}p_2 + p_3$$

$$(25) \quad P_4 = v_{1,4}p_1 + v_{2,4}p_2 + v_{3,4}p_3 + p_4$$

一般に、

$$(26) \quad P_i = \sum_{j=1}^i v_{j,i} p_j, (\text{ただし、} v_{j,j} = 1 \text{ とする}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$q_i$  についても同じことが言えて、

$$(27) \quad Q_i = \sum_{j=1}^i v_{j,i} q_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$S(\cdot)$  がブラウン運動をするという仮定により  $S(t)$  から始まっても、 $Z(t)$  から始まっても(26)の  $P_i$ 、(27)の  $Q_i$  における  $v_{j,i}$  は同じ確率を使っていいことになる。

この関係をよくみてゆくと、

$p_1 = P_1$ 、 $q_1 = Q_1$ 、 $P_1 = mQ_1$  であるから、

$$(28) \quad \frac{p_1}{q_1} = m$$

を得る。すなわち、 $p_1 = mq_1$ 。

$$(29) \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{P_2 - v_{1,2}p_1}{Q_2 - v_{1,2}q_1} = \frac{mQ_2 - v_{1,2}mq_1}{Q_2 - v_{1,2}q_1} = m$$

故に、 $p_2 = mq_2$  を得る。

$$(30) \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{P_3 - v_{1,3}p_1 - v_{2,3}p_2}{Q_3 - v_{1,3}q_1 - v_{2,3}q_2} = \frac{mQ_3 - v_{1,3}mq_1 - v_{2,3}mq_2}{Q_3 - v_{1,3}q_1 - v_{2,3}q_2} = m$$

故に、 $p_3 = mq_3$  を得る。

以上のことから、 $p_i = q_i$ 、 $i = 1, 2, \dots, n$  なることが示された。

この関係から  $C_{II}$  を求めることができる。

$$(31) \quad \begin{aligned} C_{II} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-ri\Delta t} p_i c_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-ri\Delta t} m q_i c_i \\ &= m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-ri\Delta t} q_i c_i \\ &= m C'_{II} \end{aligned}$$

なる関係が得られる。

そして、全てをまとめて *Up and Out Call* ( $B \geq K$ ) の評価式  $C$  は、

$$(32) \quad C = C_I - C_{II} = C_I - m C'_{II} = C_1 - C_2 - m(C_3 - C_4)$$

ここで、

$$(6) \quad C_1 = S(t)\Phi(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_1)$$

$$(7) \quad d_1 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$(8) \quad C_2 = S(t)\Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$(9) \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$(12) \quad C_3 = \frac{B^2}{S(t)}\Phi(d_3 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(d_3)$$

$$(16) \quad d_3 = \frac{\ln \frac{B^2}{KS(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$(14) \quad C_4 = \frac{B^2}{S(t)}\Phi(d_4 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(d_4)$$

$$(17) \quad d_4 = \frac{\ln \frac{B}{S(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$(22) \quad m = \left( \frac{B}{S(t)} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}$$

#### 4 . $J$ による Up and Out Call ( $B \geq K$ ) の評価額の計算

$J$  による関数で、バリアーオプションの評価式をつくり数値を求める。一方、シミュレーションによってブラウン運動の系列を発生させ、バリアーに到達したらプレーンバニラオブ

ションを消滅させることで、バリアーオプションの価格の期待値を計算して理論値と比較することにする。

まず恒例により、正規分布に関する  $J$  の関数を定義する。ただし、バージョン  $J6$  に準拠しているので、 $J5$  以前のバージョンでは引数  $x$ 、 $y$  を  $x.$ 、 $y.$  に変えなければならない。

```
NB. Normal Distribution
  stnormal=(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
  NP=:3 : 0
  (stnormal y)*y%(-'%+'%)/,(>:+:k),.(*:y)*>:k=.i.28
  )
  NQ=:3 : 0
  (stnormal y)*%'+/1,,y ,.>:i.28
  )
  Ndist=:3 : 0
  if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
  if. 0<:y do. q=:1-q end.
  )
NB. Yamanouti's Formula
  Ninv_y=:3 : 0
  z=-.^4*y*(1-y)
  x=.:z*(2.0611786-5.7262204%(z+11.640595))
  if. y>0.5 do. x=-x end.
  )
NB. Normal Random Numbers
NB.   Rndm_Norm Size Mu Sigma
  Rndm_Norm=:3 : 0
  'Num Mean Sigma'=.y
  Mean+Sigma*Ninv_y"0 (?Num#10000000)%10000000
  NB.{.Ninv_bm"1 z=(?(Num,2)$10000000)%10000000
  )
```

以下がバリアーオプション No.2 の価格式である。

```
NB. =====
NB. Barrier Option Pricing Model No.2
NB. J.Takeuchi Dec. 2008
NB. Usage: Barrier02 data
NB. data is list ( 6 members)
NB. SpotPrice ExePrice BarrierPrice Term(Month) Sigma FreeRate
NB. ex. data=. 100 120 140 12 20 6
NB. =====
  Barrier02=:3 : 0
```

```

'Spot Kosi Barrier Term Sigma Rate'=. y
Ter=:Term%12[Sig=:Sigma%100[Rat=:Rate%100
m=. (Barrier%Spot)^((2*Rat%Sig^2)-1)
er=.^-Rat*Ter
d1=.ddd Spot,Kosi
d2=.ddd Spot,Barrier
d3=.ddd (Barrier^2),Kosi*Spot
d4=.ddd Barrier,Spot
C1=. (Spot*Ndist(d1+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d1)
C2=. (Spot*Ndist(d2+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d2)
C3=. (((Barrier^2)%Spot)*Ndist(d3+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d3)
C4=. (((Barrier^2)%Spot)*Ndist(d4+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d4)
C=. (C1-C2)-m*(C3-C4)
)
NB.=====
NB.    ** Sub_Function ddd ** (It takes a list of 2 members.)
NB.ddd Numerator(Bunshi),Denominator(Bunbo)
NB.Usage : ddd Spot,Barrier    Rat,Sig and Ter are Global Vars.
NB.=====
    ddd=:3 : 0
'Nume Deno'=.y
((^Nume%Deno)+(Rat--*:Sig)*Ter)%Sig*%:Ter
)
NB.=====
NB.Simulation for Barrier Option Type 2
NB.Numbers Barrier_02 Spot Kousi Barrier Term Volatility Rate
NB.=====
    Barrier_02=:4 : 0
'S0 K B T Vol r'=.y
i=.0[Smax=.S=.MM#S0[MM=.x
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(1%12)*z
Smax=.S>.Smax
NB. print S
goto_L1.
label_owari.
w=. (S-K)*(p=:Smax<B)
NB. w=. (S-K)

```



```

C=(^(r%100)*(T%12))*MM%~/ (0<w)#w
)
NB. =====
NB. Black Scholes Model
NB. M.Shimura Nov. 2000
NB. usage: bs data
NB. data is a list ( 5 block)
NB. AssetPrice ExetPrice Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=. 14500 14000 2 38 6
NB. =====
bs =: 3 : 0
'a b c d e'=. y
t=. c % 12
u=. (^. a % b) + t* (e1=.e % 100) - -(bor=.d % 100) ^2
p2=. u % (bor * %: t)
p1=. p2 + bor * %: t
n1=.ndf p1
n2=. ndf p2
bs=. (a * n1 ) - b *n2 *( ^ (-e1) * t)
bs
)

```

まず、前回の例題から（文献【4】）、スポット価格1000円、行使価格1000円、バリアー価格1200円、オプション期間3ヶ月、リスクフリー金利5%、ボラティリティ30%では、

```

Barrier02 1000 1000 1200 3 30 5
19.3695

```

バリアーをあげてゆくと、

```

Barrier02 1000 1000 1200 3 30 5
19.3695
Barrier02 1000 1000 1300 3 30 5
41.3059
Barrier02 1000 1000 1400 3 30 5
55.717
Barrier02 1000 1000 1500 3 30 5
62.3388
Barrier02 1000 1000 1600 3 30 5
64.7748
Barrier02 1000 1000 1800 3 30 5

```

65.7579

Barrier02 1000 1000 2000 3 30 5

65.8269

Barrier02 1000 1000 2500 3 30 5

65.8308

ほとんどバリアーに関係がなくなる。

ちなみにブラック・ショールズ(プレーンバニラオプション)では

bs 1000 1000 3 30 5

65.8308

である。

期間を長くすると、バリアーの影響が大になる。

Barrier02 100 90 110 6 10 10

6.36454

Barrier02 100 90 120 6 10 10

13.0377

Barrier02 100 90 130 6 10 10

14.3423

Barrier02 100 90 140 6 10 10

14.4197

bs 100 90 6 10 10

14.4216

Barrier02 100 90 110 12 10 10

2.87675

Barrier02 100 90 120 12 10 10

10.1116

Barrier02 100 90 130 12 10 10

15.8297

Barrier02 100 90 140 12 10 10

18.0372

bs 100 90 12 10 10

18.6309

シミュレーションのよる検討(不十分)。

まず、前回の例題から。

スポット価格 1000 円、行使価格 1000 円、バリアー価格 1200 円  
 、オプション期間 3ヶ月、リスクフリー金利 5%、ボラティリティ 30%では

100000 Barrier\_02 1000 1000 1200 3 30 5

31.5488

100000 Barrier\_02 1000 1000 1200 3 30 5

31.5986

やや高めに出る。計算値は 19.3695 である。

バリアーを高くしてゆくと、

100000 Barrier\_02 1000 1000 1300 3 30 5

51.1736

100000 Barrier\_02 1000 1000 1400 3 30 5

61.335

100000 Barrier\_02 1000 1000 1500 3 30 5

64.4012

100000 Barrier\_02 1000 1000 2000 3 30 5

66.1947

プレーンバニラ (ブラック・ショールズ) では、

bs 1000 1000 3 30 5

65.8308

バリアーを低くするとシミュレーションとのずれが大きくなっている。

検討を要する。

【参考文献】

- 【1】山下司 (2001) : オプションプライシングの数理 - 基礎理論と専門書のブリッジテキスト - 金融財政事情研究会
- 【2】竹内寿一郎・本田皓士 (2006) : エキゾチックオプション価格のシミュレーション その1 - キャッシュデジタルとプレーンバニラオプション - JAPLA 2006 シンポジウム 2006.12.9 資料
- 【3】竹内寿一郎 (2007) : エキゾチックオプション価格のシミュレーション その2 - ダイアログボックスで決めるオプション価格のJ関数 - JAPLA 研究会 2007.1.27 資料
- 【4】竹内寿一郎 (2008) : エキゾチックオプション価格のシミュレーション その6 - バリアーオプションの価格式 (1) - JAPLA2008 夏合宿 2008.8.02-04 資料

【補遺】

$$(1) \quad W_1 = \int_K^\infty S(T)f(S(T))dS(T) = \int_{x_0}^\infty S(t)e^{x\sigma\sqrt{T-t}+(r-\sigma^2/2)(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$(2) \quad x_0 = \frac{\ln\{K/S(t)\} - (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

ここで  $x_0$  は  $S(T) = K$  を満たす点で、(2) で計算することができる。(1) をさらに整理する。

$$(3) \quad W_1 = S(t)e^{r(T-t)} \int_{x_0}^\infty e^{x\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= S(t)e^{r(T-t)} \int_{x_0-\sigma\sqrt{T-t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = S(t)e^{r(T-t)} \Phi(-x_0 + \sigma\sqrt{T-t})$$

$$(4) \quad d = -x_0 = \frac{\ln\{S(t)/K\} + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$