

## 7の逆数を小数展開したときに現れる、142857という数値の問題

統計数理研究所(名誉教授) 鈴木義一郎

7という数は極めて特徴的な数である。太陽暦では、7を周期に曜日が変わる。野球での7イニング目をなぜか「ラッキー・セブン」といって、得点の入るケースが多い。また日本でも77歳を「喜寿」といって、めでたいとしてお祝いをする。さらに女性に対しては、7は生涯のリズムと結びついている。7年間で2回やると「初経」、7年間で7回続くと「閉経」となる。また死者への崇拜として、7日目から(7×7=)49日目までを亡くなった人を偲んでの“供養”を行う。

古代オリエントの大きな川の数は、次の7つである：

ナイル川、チグリス川、ユーフラテス川、オクサス川、ヤクサル川、  
アラックス川、インダス川

また日本人は7人の幸福な神(7福神)をもっている：

布袋(慈愛に満ちた神)、毘沙門天(守り神)、福祿寿(長寿の神)、寿老人(学業の神)、  
大黒(栄養の神)、恵比寿(商業・漁業の神)、弁財天(音楽の神)

さて、7が極めて不思議な数であるというのは、次のような事実による：

7の逆数を無限小数で展開してみると

$$1/7 = 0.142857142857142857.....$$

のように、142857という数値がいつまでも循環して表れる。

一般に、整数の比で表される「有理数」を小数で表すとき、無限に続く場合でも、必ず同じパターンが繰り返し表れることが知られている。そこで、この繰り返しの部分の数値142857を2倍してみると

$$142857 \times 2 = 285714$$

となるが、この数は142857の3番目の数が先頭になるように同じ順番で並べ替えたものであることが分かる。

さらに、142857に3、4、5、6を掛けた結果も

$$142857 \times 3 = 428571 \quad , \quad 142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285 \quad , \quad 142857 \times 6 = 857142$$

のように、いずれの数も142857の順序を変えずに、適宜並べ替えた数値になっていることが確かめられる。

そこで、ある整数 N がこのような性質をもつときに、「N は性質(C)をもつ」ということに  
する。

《142857 のような性質(C)をもった数が他にあるのだろうか?》

<pre>3 :&lt;"0":y' s=:142857</pre> <table border="1" data-bbox="252 483 509 754"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p>(「:」は数値を文字化する 演算子である。)</p> <pre>3 :1 .&lt;"0":y' s</pre> <table border="1" data-bbox="239 918 494 1184"> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1						4						2						8						5						7						4						2						8						5						7						1						<pre>]a=:3 :&gt;(i.#t) ."0 1 t=.&lt;"0":y' s</pre> <p>142857 428571 285714 857142 571428 714285</p>
1																																																																									
4																																																																									
2																																																																									
8																																																																									
5																																																																									
7																																																																									
4																																																																									
2																																																																									
8																																																																									
5																																																																									
7																																																																									
1																																																																									
<pre>". a</pre> <p>142857 428571 285714 857142 571428 714285</p> <pre>/:~". a</pre> <p>142857 285714 428571 571428 714285 857142</p>	<p>左のボックスの結果より「6桁の整数 142857 は性質(C)をもつ」ことが確かめ られた。</p>																																																																								
<pre>order=: 3 :/:~".&gt;(i.#t) ."0 1 t=.&lt;"0":y'</pre> <pre>]n=:order 142857</pre> <p>142857 285714 428571 571428 714285 857142</p> <pre>]m=(multi=:3 :(&gt;i.#":y)*{y} n</pre> <p>142857 285714 428571 571428 714285 857142</p>	<pre>3 :n~:multi order y' 142857</pre> <p>1</p> <pre>3 :n~:multi order y' 142856</pre> <p>0</p>																																																																								

<pre>match=:3 :0</pre> <pre>m=(i.#t) ."0 1 t=.&lt;"0":y'</pre> <pre>n :(&gt;i.#t)*{n=:/:~".&gt;m</pre> <p>)</p> <p>「match」という関数は y が</p>	<pre>find=:4 :0</pre> <pre>s=.r#k [ r=.match k=.x</pre> <pre>while.(y-x)&gt;#r</pre> <pre>do.r=.r,match(k=.k+1)</pre> <pre>s=.s,({:r)#k</pre>	<pre>find m=:4 :0 M.</pre> <pre>s=.r#k [ r=.match k=.x</pre> <pre>while.(y-x)&gt;#r</pre> <pre>do.r=.r,match(k=.k+1)</pre> <pre>s=.s,({:r)#k</pre>
--	---	--

性質(P)をもてば1、そうでなければ0を出力する。	end. )	end. )
match"0(142856+i.3) 0 1 0	「find」や「findm」という両側関数は、左引数から右引数までの整数で、性質(C)をもつ数値を出力する。	

6!:2'f=:11 find 150000' 21.3093 f 142857	6!:2'fm=:11 findm 150000' 21.3064 fm 142857	「11」から「150000」までの整数で、性質(C)をもつ数値は「142857」のみ。
6!:2'f=:1.5e5 find 5e5' 56.8814 f 285714 428571	6!:2'fm=:1.5e5 findm 5e5' 58.7827 fm 285714 428571	142857 * 2 285714 142857 * 3 428571
「150000」から「500000」までの整数で、性質(C)をもつ数値として出力されたものは、「285714」と「428571」であるが、これらは「142857」を2倍、3倍したもので本質的には新発見ではない。つまり6桁の整数としては、唯の1個だけといえる。なお、「Virision 602」の「M.」の機能には、全く効果無し！むしろ用いないほうがベターである。		

6!:2'f=(h-1e6)find h=:2e6' 201.543	6!:2'f=(h-1e6)find h=:4e6' 204.967	「1000000」から 「5000000」までで性質 (C)をもつ数値は1組も 無い。
6!:2'f=(h-1e6)find h=:3e6' 199.657	6!:2'f=(h-1e6)find h=:5e6' 200.376	

6!:2'f=(h-5e6)find h=:1.5e7' 1143.86	6!:2'f=(h-5e6)find h=:3.5e7' 1174.2	「10000000」から 「50000000」までで 性質(C)をもつ数値 は1組も無い。
6!:2'f=(h-5e6)find h=:2e7' 1167.95	6!:2'f=(h-5e6)find h=:4e7' 1182.06	
6!:2'f=(h-5e6)find h=:2.5e7' 1178.67	6!:2'f=(h-5e6)find h=:4.5e7' 1151.14	
6!:2'f=(h-5e6)find h=:3e7' 1164.91	6!:2'f=(h-5e6)find h=:5e7' 1173.41	

それでは、「8進数」の場合について調べてみよう。

degitt=:1:+<.@([^.1:;>./])	8 degitt 63 64	8 trans 689
trans=(degitt\$)#:	2 3	1 2 6 1
rotate=[:/:~i.@degitt . "0 1 trans	]A=:8 rotate 689	]B=:8 multi 689
multi=:4 :0	1 1 2 6	1 1 2 6
d=.x degitt y [ t=.{x rotate y	1 2 6 1	2 2 5 4
k#:(>:i.d)*(k=.d\$x)#.t	2 6 1 1	3 4 0 2
)	6 1 1 2	4 5 3 0
A -: B	[659] <sub>10</sub> = [1261] <sub>8</sub> は、当然失格である。	
0		

match8=:3 :'(8 rotate y)-:8 multi y'	10 8 \$ 8([:<trans)"0(i.16+8^2)
find8=:4 :0	
s=.r#k [ r=.match8 k=.x	
while.(y-x)>#r	
do.r=.r,match8(k=.k+1)	
s=.s.({:r)#k	

<pre>end. ~.8([:&lt;rotate)"0 s )</pre>	
---	--

	0								
	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	6								
	7								
	10								
	11								
	12								
	13								
	14								
	15								
	16								
	17								
	20								
	21								
	22								
	23								
	24								
	24								
	26								
	27								
	30								
	31								
	32								
	33								
	34								
	35								
	36								
	37								
	40								
	41								
	42								
	43								
	44								
	45								
	46								
	47								
	50								
	51								
	52								
	53								
	54								



6!:2'f=:9 find8 100000'

21.4336

f	8 8 #.2 5	(4\$8)#.1 4 6 3	819*1 2 3 4																				
<table border="1"> <tr><td>2 5</td><td></td></tr> <tr><td>5 2</td><td></td></tr> <tr><td>1 4</td><td></td></tr> <tr><td>6 3</td><td></td></tr> <tr><td>3 1</td><td></td></tr> <tr><td>4 6</td><td></td></tr> <tr><td>4 6</td><td></td></tr> <tr><td>3 1</td><td></td></tr> <tr><td>6 3</td><td></td></tr> <tr><td>1 4</td><td></td></tr> </table>	2 5		5 2		1 4		6 3		3 1		4 6		4 6		3 1		6 3		1 4		21	819	819 1638 2457 3276
2 5																							
5 2																							
1 4																							
6 3																							
3 1																							
4 6																							
4 6																							
3 1																							
6 3																							
1 4																							
	8 8 #.5 2	(4\$8)#.3 1 4 6																					
	42	1638																					
		(4\$8)#.4 6 3 1																					
		2457																					
		(4\$8)#.6 3 1 4																					
		3276																					

6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:2e5'	6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:7e5'	$[21]_{10} = [25]_8$
21.4326	22.6747	$[819]_{10} = [1463]_8$
6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:3e5'	6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:8e5'	の2組の他は無さそ
21.6232	23.1645	うである。
6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:4e5'	6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:9e5'	
21.9571	23.1275	
6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:5e5'	6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:1e6'	
23.0757	22.8459	
6!:2'f=(h-1e5)find8 h=:6e5'	6!:2'f=(h-1e6)find8 h=:2e6'	
22.4563	273.361	

6進数の場合はどうか?

<pre> match6=:3 :'(6 rotate y)-:6 multi y' find6=:4 :0 s=:r#k [ r=:match6 k=:x while.(y-x)&gt;#r do.r=:r,match6(k=:k+1) s=:s,({:r)#k end. ~.6({:&lt;rotate)"0 s </pre>	<p>6!:2'f=:7 find6 10000'</p> <p>2.12235</p> <p>6!:2'f=:1e4 find6 2e4'</p> <p>2.16309</p> <p>6!:2'f=:2e4 find6 1e5'</p> <p>17.5527</p> <p>6!:2'f=:1e5 find6 1e6'</p> <p>226.942</p>	<p>6進数の場合には性質(C)をもつ数値は1組も検出されない。</p>
--	---	--------------------------------------



)	6!:2'f=:1e6 find6 1e7' 2570.4	
---	----------------------------------	--

9進数の場合はどうか?

<pre> match9=:3 :(9 rotate y)-:9 multi y'    find9=:4 :0 s=.r#k [ r=.match9 k=.x while.(y-x)&gt;#r   do.r=.r,match9(k=.k+1)   s=.s,({:r)#k end. ~.9([:&lt;rotate)"0 s ) </pre>	<pre> findm9=:4 :0 M. s=.r#k [ r=.match9 k=.x while.(y-x)&gt;#r   do.r=.r,match9(k=.k+1)   s=.s,({:r)#k end. ~.9([:&lt;rotate)"0 s ) </pre>	
6!:2'f=:10 find9 100000'	6!:2'f=:10 find9 1000000'	6!:2'f=:10 find9 1000000'
20.1867 f	240.703 f	242.158 f