

# ムーア・ペンローズの一般逆行列

M.Shimura

JCD02773@nifty.ne.jp

2008年4月22日

## 1 ムーア・ペンローズの一般逆行列

### 1.1 SVD 分解

J の packages/math/ に SVD 分解が入っている。

```
svd |: >: i. 3 3
```

```
+-----+-----+-----+-----+
|0.479671  _0.776691  _0.00100086|16.8481  1.06837  4.87336e_8|0.214837  0.887231  _0.408248|
|0.572368  _0.0756865  _0.00119431|          |0.520587  0.249644  0.816497|
|0.665064   0.625318  _0.00138777|          |0.826338  _0.387943  _0.408248|
+-----+-----+-----+-----+
```

### 1.2 一般逆行列

この SVD 分解からムーア・ペンローズの一般逆行列を計算できる。

正則でない行列や縦長、横長の行列は、逆行列が計算できない。このような場合でも困難を乗り越えて巧妙に逆行列を計算する手法にムーア・ペンローズの一般逆行列がある。

\*1\*2

$A$ is $m \times n$	$m = n$	$m > n$	$m < n$
$Ax = b$	$x = A^{-1}b$	$x = (A^T A)^{-1} A^T b$	$x = A^T (A A^T)^{-1} b$
$A^-$ (一般逆行列)		$(A^T A)^{-1} A^T$	$A^T (A A^T)^{-1}$
	$x = A^{-1}b$	$x = A^- b$	$x = A^- b$

SVD 分解を用いたムーア・ペンローズの一般逆行列

\*1 APL や J 等の配列計算言語は縦長の行列の逆行列をサポートしている。

\*2 かつて、J が横長の行列の逆行列をサポートしないことを叱責する人がいたが、無理にサポートする事を避けたようだ。

$$A^{-} = V \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & & & \\ & \frac{1}{w_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \\ & & & & \frac{1}{w_n} \end{pmatrix} U^T$$

$A$  が正方行列 ( $N \times N$ ) のとき:  $A^{-1} = V[\text{diag}(1/w_j)U^T$   
 $Ax = b$  の解は:  $x = V[\text{diag}(1/w_j)](U^T b)$   
ただし、 $w_j = 0$  のときは:  $1/w_j = 0$  とする

一般逆行列の計算では微少な数や無限大を 0 に書き戻す処理が必要である。

a	% a	mp_inv a
1 4 7	domain error	_0.638889 _0.0555556 0.527778
2 5 8	%a	_0.166667 1.67477e_13 0.166667
3 6 9		0.305556 0.0555556 _0.194444

### 1.3 Script

```
mp_inv=: 3 : 0
NB. moore penrose generalized inverse matrix
'U0 W0 V0'=: svd y
if. 0= */ IND0=. 1e_6 < W0 do. NB. very small number -> 0
W0=. (0) ( (-.IND0) # i. # W0) } W0
end.
W1=. % W0 NB. not %
if. 0= */ IND1=. W1 e. _ do. NB. infty -> 0
W1=. (0) (IND1 # i. # W1) } W1
end.
V0 +/ . * W1 * |: U0
)
```

前の 2 段は不定や小さい数を 0 に書き戻すプロセスである。1e\_6 はもっと大きく 0 に近づけても良い。  
次の一行で一般逆行列を求める。

```
V0 +/ . * W1 * |: U0 NB. calc generalized inv mat
```